

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Simon Ferlin**

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

Mentor:

Prof. dr. sc. Igor Karšaj, dipl. ing.

Student:

Simon Ferlin

Zagreb, 2016.

*Izjavljujem pod punom materijalnom i moralnom odgovornošću da sam ovaj diplomski rad radio samostalno, služeći se znanjem stečenim na Fakultetu strojarstva i brodogradnje, Sveučilišta u Zagrebu te navedenom literaturom.*

*Najveću zahvalnost želio bih izraziti svojem mentoru prof.dr.sc Igoru Karšaju, na pružanoj prilici i mogućnostima da naučim više, na korisnim savjetima i objašnjenima te na razumijevanju i strpljenju prilikom izrade ovoga rada.*

*Također se želim zahvaliti doc.dr.sc. Tomislavu Jaraku. na uloženom trudu i vremenu prilikom mog upoznavanja s tematikom te na nesebičnoj pomoći, strpljenju, objašnjenima i korisnim savjetima.*

*Isto tako zahvalio bi se i ostalim profesorima i asistentima koji su mi svojim predanim radom pružili mogućnost da tokom školovanja naučim više.*

*Također se želim zahvaliti svojim roditeljima, djevojci i kolegama s fakulteta koji su mi tokom školovanja bili velika podrška i potpora.*

Simon Ferlin



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Simon Ferlin** Mat. br.: 0035187754

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička analiza čvrstoće i stabilnosti lista kobilice male jedrilice**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical Analysis of Keel Fin for Small Sailing Boat**

Opis zadatka:

Kobilica osigurava stabilnost broda pri jedrenju i onemogućava prevrtanje broda. Konstrukcija se sastoji od lista i balasta koji je pričvršćen za dno lista. Oplata lista ima oblik teorijski idealnog hidrodinamičkog profila.

Na temelju dostavljenog geometrijskog CAD modela, potrebno je provesti kontrolni statički proračun čvrstoće za kobilicu izrađenu od visokočvrstog čelika. Napraviti usporedbu rezultata korištenjem nelinearno-elastičnih te linearno-elastičnih algoritama. Analizirati koncentracije naprezanja na mjestima geometrijskih diskontinuiteta. Ukoliko je potrebno, predložiti potrebne izmjene u konstrukciji. Analizirati čvrstoću za kobilicu izrađenu od laminata koji se sastoji od kombinacije slojeva ojačanih staklenim i ugljičnim vlaknima, pri čemu je potrebno provesti optimiranje konstrukcije s obzirom na težinu. Za konačnu varijantu provesti kontrolu stabilnosti.

Sve proračune izvršiti numerički primjenom programskog paketa Abaqus koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Pri proračunu čvrstoće lista kobilice koristiti kriterije popuštanja za kompozitne materijale dostupne u programskom paketu „Abaqus“. Prije proračuna kobilice izvršiti verifikaciju upotrebljivanih elemenata i tehnika modeliranja na jednostavnijim problemima. Geometrijske CAD modele početnog idejnog rješenja, podatke o opterećenju i materijalnim svojstvima dostavit će mentor.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
5. svibnja 2016.

Rok predaje rada:  
7. srpnja 2016.

Predviđeni datumi obrane:  
13., 14. i 15. srpnja 2016.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Igor Karšaj

Predsjednica Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić



# SADRŽAJ

POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	VIII
POPIS OZNAKA .....	IX
SAŽETAK.....	XI
SUMMARY .....	XII
1. UVOD .....	1
1.1. Općenito o jedrilicama.....	1
1.1.1. Osnovni dijelovi jedrilica.....	1
1.1.2. Vrste jedrilica.....	3
1.2. Kobilica jedrilice .....	4
1.3. Materijali za izradu lista kobilice .....	6
1.3.1. Visokočvrsti čelik <i>Weldox</i> .....	6
1.3.2. Kompozitni materijali .....	6
2. OSNOVNI POJMOVI MEHANIKE KOMPOZITNIH MATERIJALA .....	9
2.1. Tenzor elastičnosti.....	9
2.2. Tenzor podatljivosti.....	10
2.3. Reducirana matrica elastičnosti .....	11
2.4. Koordinatni sustavi.....	11
2.5. Sile i momenti u višeslojnom kompozitu (laminatu).....	13
2.6. Kriteriji popuštanja kompozita .....	16
2.6.1. Tsai-Hill kriterij .....	16
2.6.2. Tsai-Wu kriterij.....	17
3. O METODI KONAČNIH ELEMENATA.....	18
3.1. Opis programa za računanje metodom konačnih elemenata .....	18
3.2. Osnovni konačni elementi .....	19
3.3. Konačni elementi korišteni u proračunskom modelu .....	19
3.3.1. Ljuskasti konačni elementi za analizu tankih ploča i ljusaka .....	20
3.3.2. Trodimenzijski konačni elementi.....	21
4. VERIFIKACIJA NUMERIČKOG MODELA.....	23
4.1. Analitička rješenja .....	23
4.1.1. Izotropna ploča opterećena na savijanje .....	23
4.1.2. Izotropna ploča opterećena na izvijanje.....	26
4.1.3. Kompozitna ploča opterećena na savijanje.....	27
4.1.4. Kompozitna ploča opterećena na izvijanje .....	32
4.2. Proračunski modeli .....	33
4.2.1. Numerički model za analizu savijanja ploče diskretizirane ljuskastim konačnim elementima .....	33

4.2.2. Numerički model za analizu savijanja ploče diskretizirane trodimenzijskim konačnim elementima.....	35
4.2.3. Numerički model za analizu izvijanja ploče .....	36
4.3. Usporedba rezultata dobivenih za izotropnu ploču .....	38
4.3.1. Izotropna ploča diskretizirana ljuskastim konačnim elementima za analizu tankih ploča .....	38
4.3.2. Izotropna ploča diskretizirana trodimenzijskim konačnim elementima .....	42
4.3.3. Usporedba ljuskastih konačnih elemenata za tanke i debele ploče kod analize savijanja izotropne ploče .....	45
4.4. Usporedba rezultata dobivenih za laminat.....	46
5. PRORAČUN ČVRSTOĆE I KONTROLA STABILNOSTI KOBILICE IZRAĐENE OD VISOKOČVRSTOG ČELIKA .....	50
5.1. Analiza čvrstoće samo oplata .....	51
5.1.1. Oplata opterećena nazivnim opterećenjem od 5000 N .....	52
5.1.2. Oplata opterećena opterećenjem od 20000 N .....	56
5.2. Analiza čvrstoće cijele kobilice .....	60
5.3. Kontrola stabilnosti kobilice.....	65
6. PRORAČUN ČVRSTOĆE I KONTROLA STABILNOSTI KOBILICE IZRAĐENE OD KOMPOZITNOG MATERIJALA .....	66
6.1. Oplata debljine 4 mm izrađena od stakleno-epoksidnog kompozita.....	69
6.2. Oplata debljine 8 mm izrađena od stakleno-epoksidnog kompozita.....	70
6.3. Oplata izrađena od kombinacije stakleno- i ugljično-epoksidnog kompozita.....	72
6.4. Kontrola stabilnosti kompozitne oplata .....	74
6.5. Kompozitna oplata pod utjecajem različitih vrsta opterećenja.....	76
7. ZAKLJUČAK .....	78
LITERATURA.....	81

## POPIS SLIKA

Slika 1.1. Osnovni dijelovi jedrilice [2] .....	1
Slika 1.2. Neke vrste jedrilica [1] .....	4
Slika 1.3. Prikaz jedrilice s označenom kutijom u koju se uvlači kobilica .....	5
Slika 1.4. Detalj kobilice s utegom i kutije u koju se uvlači .....	5
Slika 2.1. Sustav glavnih materijalnih osi (1,2) i globalni koordinatni sustav (x,y) jednog sloja kompozita.....	11
Slika 2.2. Način postavljanja koordinatnog sustava kod višeslojnog kompozita.....	13
Slika 2.3. Definicija momenta i sila u višeslojnom kompozitu.....	13
Slika 2.4. Numeracija slojeva u višeslojnom kompozitu .....	14
Slika 2.5. Raspodjela slojeva kod simetričnog laminata .....	15
Slika 3.1. Shematski prikaz programa za konačne elemente [4].....	18
Slika 3.2. Najčešće korišteni konačni elementi u programskom paketu <i>Abaqus</i> [14] .....	19
Slika 3.3. Trokutni konačni elementi prvog (lijevo) i drugog (desno) reda za analizu tankih ljusaka.....	20
Slika 3.4. Četverokutni konačni elementi prvog (lijevo) i drugog (desno) reda za analizu tankih ljusaka.....	20
Slika 3.5. Tetraedarski konačni elementi prvog (lijevo) i drugog (desno) reda.....	21
Slika 3.6. Heksaedarski konačni elementi prvog (lijevo) i drugog (desno) reda .....	22
Slika 4.1. Pravokutna izotropna ploča slobodno oslonjena na vanjskom rubu opterećena jednoliko kontinuirano .....	23
Slika 4.2. Pravokutna izotropna ploča slobodno oslonjena na vanjskom rubu opterećena na izvijanje .....	26
Slika 4.3. Pravokutna kompozitna ploča slobodno oslonjena na vanjskom rubu opterećena jednoliko kontinuirano .....	27
Slika 4.4. koordinatni sustavi (lijevo) i presjek laminata (desno) .....	31
Slika 4.5. Pravokutna kompozitna ploča slobodno oslonjena na vanjskom rubu opterećena na izvijanje .....	32
Slika 4.6. Model ploče korišten za analizu savijanja diskretizirane ljuskastim KE.....	33
Slika 4.7. Rubni uvjeti pomaka i sila na ploči korištenoj za analizu savijanja ploče diskretizirane ljuskastim KE.....	34
Slika 4.8. Primjer diskretizirane ploče trokutnim (lijevo) i četverokutnim (desno) KE za analizu savijanja .....	34
Slika 4.9. Model ploče korišten za analizu savijanja diskretizirane trodimenzijskim KE .....	35
Slika 4.10. Rubni uvjeti pomaka i sila na ploči korištenoj za analizu savijanja ploče diskretizirane trodimenzijskim KE.....	35
Slika 4.11. Primjer diskretizirane ploče tetraedarskim (lijevo) i heksaedarskim (desno) KE za analizu savijanja.....	36
Slika 4.12. Model ploče korišten za analizu izvijanja ploče .....	36

Slika 4.13. Rubni uvjeti pomaka i sila na ploči korištenoj za analizu izvijanja.....	37
Slika 4.14. Primjer diskretizirane ploča trokutnim (lijevo) i četverokutnim (desno) KE za analizu izvijanja.....	37
Slika 4.15. Dijagram konvergencije progiba izotropne ploče u točki A diskretizirane trokutnim ljuskastim KE .....	39
Slika 4.16. Dijagram konvergencije progiba izotropne ploče u točki A diskretizirane četverokutnim ljuskastim KE .....	39
Slika 4.17. Dijagram konvergencije normalnog naprezanja u smjeru $x$ -osi u točki B izotropne ploče diskretizirane trokutnim ljuskastim KE .....	40
Slika 4.18. Dijagram konvergencije normalnog naprezanja u smjeru $x$ -osi u točki B izotropne ploče diskretizirane četverokutnim ljuskastim KE.....	40
Slika 4.19. Dijagram konvergencije najniže kritične sile izvijanja izotropne ploče diskretizirane trokutnim ljuskastim KE.....	41
Slika 4.20. Dijagram konvergencije najniže kritične sile izvijanja izotropne ploče diskretizirane četverokutnim ljuskastim KE .....	41
Slika 4.21. Dijagram konvergencije progiba izotropne ploče u točki A diskretizirane tetraedarskim KE .....	42
Slika 4.22. Dijagram konvergencije progiba izotropne ploče u točki A diskretizirane heksaedarskim KE .....	43
Slika 4.23. Dijagram konvergencije normalnog naprezanja u smjeru $x$ -osi u točki B izotropne ploče diskretizirane tetraedarskim KE .....	44
Slika 4.24. Dijagram konvergencije normalnog naprezanja u smjeru $x$ -osi u točki B izotropne ploče diskretizirane heksaedarskim KE .....	44
Slika 4.25. Dijagram konvergencije progiba laminata u točki A diskretiziranog trokutnim ljuskastim KE .....	46
Slika 4.26. Dijagram konvergencije progiba laminata u točki A diskretiziranog četverokutnim ljuskastim KE .....	47
Slika 4.27. Dijagram konvergencije normalnog naprezanja u smjeru $x$ -osi u točki B laminata diskretiziranog trokutnim ljuskastim KE.....	48
Slika 4.28. Dijagram konvergencije normalnog naprezanja u smjeru $x$ -osi u točki B laminata diskretiziranog četverokutnim ljuskastim KE .....	48
Slika 4.29. Dijagram konvergencije kritične sile izvijanja lamianta diskretiziranog trokutnim ljuskastim KE .....	49
Slika 4.30. Dijagram konvergencije kritične sile izvijanja laminata diskretiziranog četverokutnim ljuskastim KE .....	49
Slika 5.1. Trodimenzijski model kobilice jedrilice .....	50
Slika 5.2. Način opterećenja kobilice tijekom naleta vjetra [1] .....	50
Slika 5.3. Ljuskasti model oplata kobilice .....	51
Slika 5.4. Rubni uvjeti pomaka (lijevo) i referentna točka preko koje su zadani rubni uvjeti sila (desno) .....	51

Slika 5.5. Oplata kobilice diskretizirana s 11116 četverokutnih ljuskastih KE drugog reda (S8R) .....	52
Slika 5.6. Progib (u mm) oplata kobilice debljine 4 mm kod nazivnog opterećenja 5000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom .....	52
Slika 5.7. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na oplati kobilice debljine 4 mm kod nazivnog opterećenja 5000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom .....	53
Slika 5.8. Podmodel oplata kobilice (lijevo) i diskretizirani model s 16160 heksaedarskim KE drugog reda, C3D20R (desno) .....	53
Slika 5.9. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na podmodelu oplata kobilice debljine 4 mm kod nazivnog opterećenja 5000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom.....	53
Slika 5.10. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na podmodelu sa zaobljenjem oplata kobilice debljine 4 mm kod nazivnog opterećenja 5000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom .....	54
Slika 5.11. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na podmodelu sa zaobljenjem oplata kobilice debljine 8 mm kod nazivnog opterećenja 5000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom .....	54
Slika 5.12. Dijagram ovisnosti koncentrirane sile i pomaka točke T za debljinu oplata 4 mm kod nazivnog opterećenja od 5000 N.....	55
Slika 5.13. Dijagram ovisnosti koncentrirane sile i pomaka točke T za debljinu oplata 8 mm kod nazivnog opterećenja od 5000 N.....	55
Slika 5.14. Progib (u mm) oplata kobilice debljine 4 mm kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom .....	56
Slika 5.15. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na oplati kobilice debljine 4 mm kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom .....	56
Slika 5.16. Dijagram ovisnosti koncentrirane sile i pomaka točke T za debljinu oplata 4 mm kod opterećenja od 20000 N.....	57
Slika 5.17. Progib (u mm) oplata kobilice debljine 8 mm kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom .....	58
Slika 5.18. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na oplati kobilice debljine 8 mm kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom .....	58
Slika 5.19. Dijagram ovisnosti koncentrirane sile i pomaka točke T za debljinu oplata 8 mm kod opterećenja od 20000 N.....	58
Slika 5.20. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na podmodelu oplata kobilice debljine 8 mm kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom .....	59

Slika 5.21. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na podmodelu sa zaobljenjem oplata kobilice debljine 8 mm kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom .....	59
Slika 5.22. Ljuskasti modeli dijelova kobilice .....	60
Slika 5.23. Ljuskasti model kobilice .....	60
Slika 5.24. Rubni uvjeti pomaka (lijevo) i referentna točka preko koje su zadani rubni uvjeti sila (desno) na ljuskastom modelu kobilice .....	61
Slika 5.25. Kobilica diskretizirana s 18125 četverokutnih ljuskastih KE drugog reda (S8R) .	61
Slika 5.26. Progib (u mm) kobilice kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom .....	62
Slika 5.27. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na kobilici kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom .....	62
Slika 5.28. Dijagram ovisnosti koncentrirane sile i pomaka točke T za kobilicu kod opterećenja od 20000 N.....	63
Slika 5.29. Podmodel kobilice (lijevo) i diskretizirani model s 74359 tetraedarskih KE drugog reda, C3D10 (desno) .....	63
Slika 5.30. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na podmodelu kobilice kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom .....	64
Slika 5.31. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na podmodelu kobilice sa zaobljenjima kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom .....	64
Slika 5.32. Prva forma gubitka stabilnosti kobilice izrađene od visokočvrstog čelika .....	65
Slika 6.1. Kompozitna izvedba oplata kobilice .....	66
Slika 6.2. Rubni uvjeti pomaka (lijevo) i referentna točka preko koje su zadani rubni uvjeti sila (desno) na kompozitnoj izvedbi oplata kobilice .....	67
Slika 6.3. Kompozitna izvedba oplata kobilice diskretizirana s 10584 četverokutnih ljuskastih KE drugog reda (S8R5).....	68
Slika 6.4. Usmjerenje vlakana na oplati pod kutem od 0° .....	68
Slika 6.5. Raspored slojeva za 1. (lijevo) i 2. (desno) izvedbu oplata debljine 4 mm .....	69
Slika 6.6. Tsai-Hill kriterij popuštanja kompozita za 1. (lijevo) i 2. (desno) izvedbu .....	69
Slika 6.7. Tsai-Wu kriterij popuštanja kompozita za 1. (lijevo) i 2. (desno) izvedbu .....	69
Slika 6.8. Raspored slojeva za različite izvedbe oplata debljine 8 mm.....	70
Slika 6.9. Tsai-Hill (lijevo) i Tsai-Wu (desno) kriterij popuštanja kompozita za oplatu debljine 8 mm za 1. izvedbu rasporeda slojeva.....	71
Slika 6.10. Tsai-Hill (lijevo) i Tsai-Wu (desno) kriterij popuštanja kompozita za oplatu debljine 8 mm za 4. izvedbu rasporeda slojeva.....	71
Slika 6.11. Tsai-Hill (lijevo) i Tsai-Wu (desno) kriterij popuštanja kompozita za oplatu debljine 8 mm za 3. izvedbu rasporeda slojeva.....	71

Slika 6.12. Tsai-Hill (lijevo) i Tsai-Wu (desno) kriterij popuštanja kompozita za oplatu debljine 8 mm za 4. izvedbu rasporeda slojeva .....	71
Slika 6.13. Kompozitna oplata podijeljena na 3 područja.....	72
Slika 6.14. Raspored slojeva za konačnu izvedbu kompozitne oplate .....	73
Slika 6.15. Tsai-Hill (lijevo) i Tsai-Wu (desno) kriterij popuštanja kompozita za konačnu izvedbu kompozitne oplate.....	73
Slika 6.16. Prikaz načina zadavanja jediničnog opterećenja u referentnu točku na kompozitnoj oplati kod kontrole stabilnosti .....	74
Slika 6.17. Prva forma gubitka stabilnosti kod prvog načina opterećivanja kompozitne oplate .....	75
Slika 6.18. Prva forma gubitka stabilnosti kod drugog načina opterećivanja kompozitne oplate .....	75
Slika 6.19. Prva forma gubitka stabilnosti kod trećeg načina opterećivanja kompozitne oplate .....	75
Slika 6.20. Slučaj opterećenja 1 .....	76
Slika 6.21. Slučaj opterećenja 2 .....	76
Slika 6.22. Tsai-Hill (lijevo) i Tsai-Wu (desno) kriterij popuštanja kompozita za slučaj opterećenja 1 .....	77
Slika 6.23. Tsai-Hill (lijevo) i Tsai-Wu (desno) kriterij popuštanja kompozita za slučaj opterećenja 2.....	77

## POPIS TABLICA

Tablica 4.1. Materijal, dimenzije i opterećenje izotropne ploče .....	25
Tablica 4.2. Materijal, dimenzije i opterećenje laminata .....	29
Tablica 4.3. Progib izotropne ploče u točki A diskretizirane različitim ljuskastim KE i relativna greška u odnosu na analitičko rješenje.....	38
Tablica 4.4. Normalno naprezanje u smjeru $x$ -osi izotropne ploče u točki B diskretizirane različitim ljuskastim KE i relativna greška u odnosu na analitičko rješenje .....	39
Tablica 4.5. Kritična sila izvijanja izotropne ploče diskretizirane različitim ljuskastim KE i relativna greška u odnosu na analitičko rješenje.....	41
Tablica 4.6. Progib izotropne ploče u točki A diskretizirane različitim trodimenzijskim KE i relativna greška u odnosu na analitičko rješenje.....	42
Tablica 4.7. Normalno naprezanje u smjeru $x$ -osi izotropne ploče u točki B diskretizirane različitim trodimenzijskim KE i relativna greška u odnosu na analitičko rješenje .....	43
Tablica 4.8. Usporedba progiba ( $w / \text{mm}$ ) u točki A i normalnog napreznja u smjeru $x$ -osi ( $\sigma_x / \text{Nmm}^{-2}$ ) u točki B za različite debljine ploče dobivenih različitim konačnim elementima .....	45
Tablica 4.9. Progib laminatae u točki A diskretiziranog različitim ljuskastim KE i relativna greška u odnosu na analitičko rješenje.....	46
Tablica 4.10. Normalno naprezanje u smjeru $x$ -osi laminata u točki B diskretiziranog različitim ljuskastim KE i relativna greška u odnosu na analitičko rješenje .....	47
Tablica 4.11. Kritična sila izvijanja laminata diskretiziranog različitim ljuskastim KE i relativna greška u odnosu na analitičko rješenje.....	49
Tablica 6.1. Svojstva materijala za ugljično-epoksidnog kompozita.....	66
Tablica 6.2. Svojstva materijala za stakleno-epoksidnog kompozita.....	66
Tablica 6.3. Parametri čvrstoće (u MPa) ugljično-epoksidnog kompozita .....	67
Tablica 6.4. Parametri čvrstoće (u MPa) stakleno-epoksidnog kompozita.....	67



## POPIS OZNAKA

### Latinične

Oznaka	Jedinica	Opis
<b>A</b>	N/mm	matrica istezne krutosti
<i>a</i>	mm	širina ploče
<b>B</b>	N	matrica spregnute krutosti
<i>b</i>	mm	duljina ploče
$C_{ijkl}$	–	tenzor elastičnosti
<b>D</b>	Nmm	matrica savojne krutosti
<i>D</i>	Nmm	savojna krutost izotropne ploče
<i>E</i>	N/mm <sup>2</sup>	modul elastičnosti izotropne ploče
$E_1$	N/mm <sup>2</sup>	Youngov modul elastičnosti kompozita u smjeru vlakana
$E_2$	N/mm <sup>2</sup>	Youngov modul elastičnosti kompozita okomito na pravac vlakana
$G_6$	N/mm <sup>2</sup>	modul smicanja kompozitnog materijala
<i>H</i>	mm	ukupna debljine ploče
<i>h</i>	mm	debljina jednog sloja kompozita
<b>M</b>	Nmm	vektor momenata savijanja u laminatu
<b>N</b>	N	vektor sila u laminatu
$N_{kr}$	N/mm	kritična sila izvijanja ploče
$S_{ijkl}$	–	tenzor podatljivosti
$T_\sigma$	–	matrica transformacije tenzora naprezanja
$T_\varepsilon$	–	matrica transformacije tenzora deformacije
<b>Q</b>	N/mm <sup>2</sup>	reducirana matrica elastičnosti u sustavu glavnih materijalni osi
$\bar{Q}$	N/mm <sup>2</sup>	reducirana matrica elastičnosti u globalnom koordinatnom sustavu
$\bar{Q}_k$	N/mm <sup>2</sup>	reducirana matrica elastičnosti u globalnom koordinatnom sustavu za sloj <i>k</i>
$X_t$	N/mm <sup>2</sup>	vlačna čvrstoća kompozita u pravcu vlakana
$X_c$	N/mm <sup>2</sup>	tlačna čvrstoća kompozita u pravcu vlakana
$Y_t$	N/mm <sup>2</sup>	vlačna čvrstoća kompozita okomito na pravac vlakana
$Y_c$	N/mm <sup>2</sup>	tlačna čvrstoća kompozita okomito na pravac vlakana
<i>S</i>	N/mm <sup>2</sup>	smična čvrstoća kompozita
$X_{et}$	–	dopuštena vlačna deformacija kompozita u pravcu vlakana
$X_{ec}$	–	dopuštena tlačna deformacija kompozita u pravcu vlakana

$Y_{\varepsilon t}$	–	dopuštena vlačna deformacija kompozita okomito na pravac vlakana
$Y_{\varepsilon c}$	–	dopuštena tlačna deformacija kompozita okomito na pravac vlakana
$S_{\varepsilon}$	–	dopuštena kutna deformacija kompozita
$w$	mm	progib ploče

**Grčke**

Oznaka	Jedinica	Opis
$\phi$	°	kut između osi globalnog koordinatnog sustava i sustava glavnih materijalnih osi
$\sigma_{ij}$	N/mm <sup>2</sup>	Cauchyev tenzor naprezanja
$\sigma_k$	N/mm <sup>2</sup>	tenzor naprezanja u globalnom koordinatnom sustavu za sloj $k$
$\sigma_{ i }$	N/mm <sup>2</sup>	tenzor naprezanja u sustavu glavnih materijalnih osi
$\sigma_{ x }$	N/mm <sup>2</sup>	tenzor naprezanja u globalnom koordinatnom sustavu
$\varepsilon_{kl}$	–	tenzor deformacije
$\varepsilon_{ i }$	–	tenzor naprezanja u globalnom koordinatnom sustavu za sloj $k$
$\varepsilon_{ i }$	–	tenzor deformacije u sustavu glavnih materijalnih osi
$\varepsilon_{ x }$	–	tenzor naprezanja u globalnom koordinatnom sustavu
$\varepsilon^0$	–	tenzor deformacije srednje površine laminata
$\kappa$	–	zakrivljenost srednje površine laminata
$\nu_{12}$	–	Poissonov faktor kompozitnog materijala

## SAŽETAK

Kobilica jedrilice je podvodna peraja kojom se zaustavlja bočno kretanje jedrilice u najtežim uvjetima. Ona osigurava stabilnost jedrilice pri jedrenju i onemogućava prevrtanje iste. Konstrukcija se sastoji od lista i utega koji je pričvršćen za dno lista. Oplata lista ima oblik teorijski idealnog hidrauličkog profila. U kobilicu se dodatno stavljaju uzdužne ukrute koje imaju zadaću smanjenja progiba kobilice uslijed savijanja.

U ovome radu detaljno se analizira ponašanje kobilice na koju djeluje protusila sili vjetra. Protusilu stvara masa utega, te se zbog toga javljaju velika opterećenja na kobilici. Promatrana jedrilica ima mogućnost uvlačenja kobilice u kutiju. Sama kutija nalazi se u sredini jedrilice. Kutija se u ovome radu ne analizira posebno, već samo kobilica u slučaju kada je do kraja izvučena iz kutije. U tom slučaju se javljaju i najveća naprezanja na mjestu spoja kobilice i kutije.

Ponašanje kobilice se promatra za dvije vrste materijala. Prvi materijal je visokočvrsti čelik. Za tu vrstu materijala kobilice uspoređuju se rezultati za progibe i naprezanja na kobilici između linearne i nelinearne analize kako bi se utvrdilo je li ponašanje kobilice za zadano opterećenje linearno ili nelinearno. Nakon proračuna čvrstoće radi se kontrola stabilnosti kobilice zbog utvrđivanja kritičnog opterećenja koje se mora javiti da kobilica izgubi stabilnost. Druga vrsta materijala od koje se radi izvedba kobilice je kompozitni materijal. U radu se koristi stakleno-epoksidni i ugljično-epoksidni kompozitni materijal. Kod kompozitnih konstrukcija stavljaju se različito usmjereni slojevi kako bi se postigla najbolja moguća mehanička svojstva. To se radi iz razloga jer kod kompozitnog materijala mehanička svojstva jako ovise o orijentaciji vlakana. Rade se različite izvedbe kompozitne kobilice, s različitim debljinama, različitim orijentacijama i vrstama kompozitnih slojeva, sve dok se ne dobije izvedba koja zadovoljava kriterije popuštanja. Na kraju se za konačnu izvedbu vrši i kontrola stabilnosti i to za različite načine opterećivanja.

Svi proračuni rade se pomoću metode konačnih elemenata u programskom paketu *Abaqus*. Prije same numeričke analize konstrukcije kobilice radi se verifikacija svih korištenih konačnih elemenata i numeričkih procedura na jednostavnom primjeru savijanja i izvijanja izotropne i kompozitne pravokutne ploče kako bi se utvrdilo koji konačni elementi će najbolje opisivati zadani problem i pomoću kojih će se postići što realniji rezultati.

**Ključne riječi:** kobilica jedrilice, metoda konačnih elemenata, nelinearna analiza, kompozitni materijal, kontrola stabilnosti

## SUMMARY

Sailboat keel is an underwater fin that has the task to stop sideways motion of the sailboat in difficult conditions. It provides stability when sailing and prevents the sailboat from overturning. The keel consists of a fin and a weight that is hitched to the bottom of the fin. The fin has the form of a theoretically ideal hydraulic profile. Longitudinal reinforcements are additionally put in the keel to provide a decrease of the displacements due to bending.

In this thesis, the detailed analysis of the behavior of the sailboat keel that is exposed to the counter force of the wind force exposed is conducted. The weight creates the counter force and creates large stresses on the keel. The observed sailboat has the possibility to pull the keel in a box. The box is placed in the middle of the sailboat. This box is not going to be analyzed in this thesis, but only the keel when it's pull out completely. In this case on the place where the keel and the box join occur the maximal stresses.

The behavior of the keel is observed for two types of material. The first material is a high strength steel. For this keel material linear and nonlinear results are compared for displacements and stresses to determinate if the behavior of the keel is linear or nonlinear. After the strength analysis the stability control is performed to determinate the critical force on the keel that is needed to lose his stability. The second keel material is a composite material. In the thesis glass-epoxy and carbon-epoxy composite material are used. By composite structures the layers are putt differently orientated because the mechanical properties depend on the fiber orientation. Different ways of the layer orientations setup are performed, until the best layer setup is obtained that satisfies the failure criteria. For the final layer setup an additional stability control for different loads is performed.

All calculations are performed using the numerical Finite Element Method (FEM) using the software program package Abaqus. The verification of all used finite elements and procedures have been conducted on a simple bending and buckling example of a rectangular isotropic and composite plate to determinate which elements are going to be the best in the analysis of the problem and with which their going to be obtained the best results.

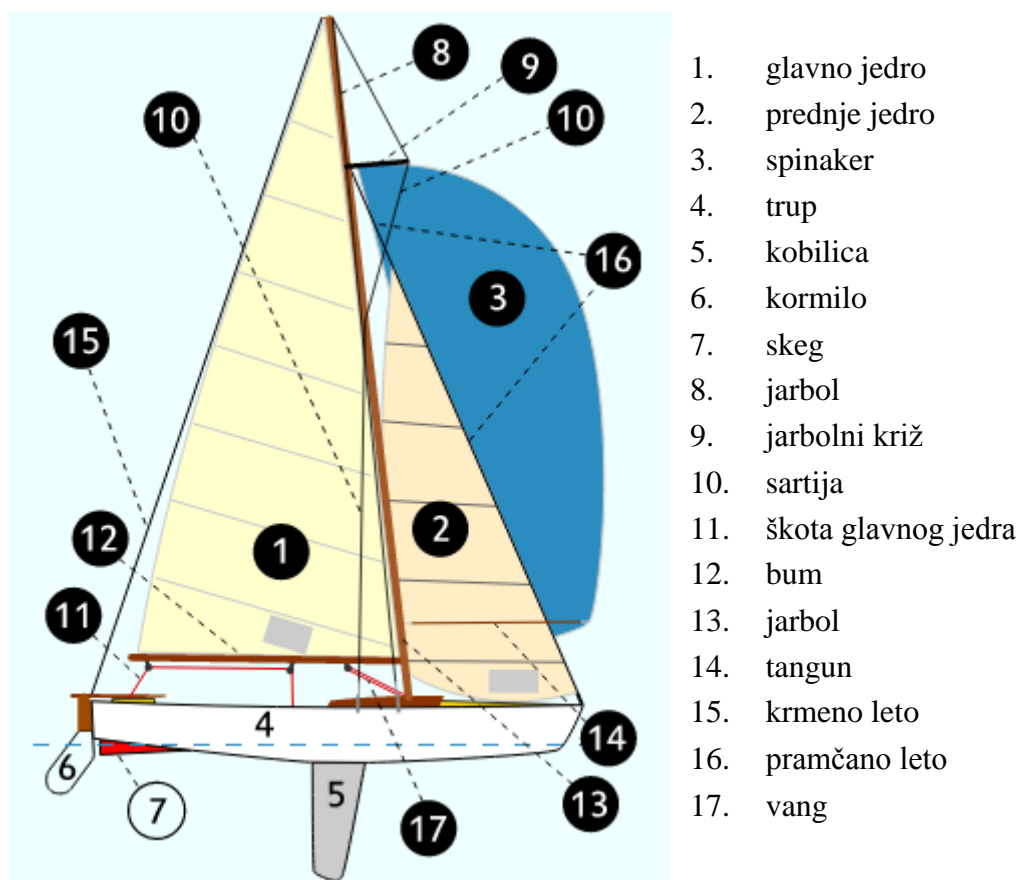
**Key words:** sailboat keel, finite element method, nonlinear analysis, composite material, stability control

# 1. UVOD

## 1.1. Općenito o jedrilicama

Jedrilica je vrsta broda koja koristi jedra kao svoj jedini ili glavni pogon. U suvremeno doba jedrilice imaju i motor kao pogonsko sredstvo, pa se razlikuju „motorne jedrilice“, kojima je motor glavno pogonsko sredstvo, a jedra pomoćno te „jedrilice s pomoćnim motorom“ koji koriste jedra kao glavno pogonsko sredstvo.

### 1.1.1. Osnovni dijelovi jedrilica



Slika 1.1. Osnovni dijelovi jedrilice [2]

Danas postoji veliki broj različitih jedrilica. Većina današnjih jedrilica duljine je između 5 i 20 metara i izvedena je s jednim jarbolom i dva trokutasta jedra (Slika 1.1.). Jarbol (8 i 13) je stup na brodu koji služi za podizanje jedara, zastava i signala. Jedro je platno razapeto na brodskom jarbolu koje je izloženo vjetru koji stvara potisak i služi kao pogon, odnosno koristeći energiju vjetra pokreće se jedrilica, a sva jedra na brodu zovu se jedrilje. S prednje strane jarbola postavlja se prednje jedro (2), dok se iza jarbola postavlja glavno jedro (1). Takva postava jedara zove se bermudsko jedrilje. Neke manje sportske jedrilice imaju samo jedno jedro, a veće jedrilice (npr. jedrenjaci) imaju više jarbola i jedara. Kada se jedri niz vjetar koristi se veliko i lagano jedro koje se naziva spinaer (3). Za upravljanje jedrima koristi se sustav konopa i

koloturnika. Konopi koji služe za upravljanje glavnim jedrom nazivaju se škota (11). Svako jedro ima tri poruba (prednji, stražnji i donji), te tri ugla s okama za učvršćenje jedra (gornji, prednji i stražnji). Jedra se mogu postaviti klasično ili namatajuće

Vjetar u jedrima stvara velike sile koje se prenose na jarbol. Da bi jarbol mogao izdržati te sile, njegov se gornji dio povezuje trupom (4) jedrilice čeličnim sajlama, tzv. sartijama (10). Sartije povezuju gornji dio jarbola s pramcem i krmom, te s bočnim stranama trupa jedrilice. Trup je vodonepropusna struktura broda ili čamca. Iznad trupa nalazi se nadgradnja i palubne kućice. Linija gdje se sastaje trup s površinom vode naziva se „vodna linija.“ Struktura trupa broda ovisi najviše o vrsti broda. U tipičnoj modernoj čeličnoj jedrilici struktura se sastoji od uzdužnih i poprečnih čeličnih profila i traka koji su presvučeni oplatom. Uzdužni i poprečni profili daju brodu čvrstoću, dok oplata daje brodu nepropusnost.

Klasično prednje jedro na prednjem porubu ima kukice koje se pričvrste za pramčano leto (16). Donje se oko pričvrsti uz pramac, a na gornje se oko veže podigač (konop), koji se provede preko vrha jarbola, te natrag u kokpit (prostor u palubi u kojem boravi posada tijekom plovidbe). Povlačenjem podigača jedro se podiže, a otpuštanjem podigača jedro se zbog vlastite težine spušta. Na stražnje oko prednjeg jedra vežu se lijeva i desna škota (konopi), koje se dalje provode kroz koloturnike na klizačima na lijevoj i desnoj strani palube te dovode do lijeve i desne strane kokpita. Klizači su pričvršćeni na šine, po kojima se mogu pomicati više prema pramcu ili prema krmu. Škotama se regulira otvorenost jedra (kut prema uzdužnici jedrilice), a položajem klizača oblik jedra. Većina jedrilica koristi namatajuće prednje jedro. Tada se na prednje leto postavlja mehanizam za namatanje, te se jedro namata oko leta. Povlačenjem jedne od škota jedro se odmata, a povlačenjem posebnog konopa jedro se namata na leto. Iako se u ovom slučaju jedro odmata i namata, u jedriličarskoj terminologiji koriste se termini dizanja i spuštanja jedra.

Klasično glavno jedro na donjem porubu ima klizače koji se umeću u bum (12), te se konopom vezanim za stražnje oko jedro nateže prema stražnjem kraju buma. Ovaj se konop ne otpušta tijekom jedrenja, odnosno donji porub jedra je stalno nategnut. Na prednjem porubu jedro ima klizale koji se umeću u kanal u jarbolu, a na gornje se oko jedra veže podigač. Glavno se jedro diže i spušta povlačenjem i otpuštanjem podigača, isto kao i prednje jedro. Vrlo često jedrilice imaju namatajuće glavno jedro. Jedro se namata unutar jarbola, a za odmatanje jedra koristi se konop vezan za stražnje oko jedra. Zasebnim se konopom jedro namata. Neke jedrilice imaju glavno jedro koje se ne namata unutar jarbola već unutar buma. Za regulaciju otvorenosti glavnog jedra (kuta prema uzdužnici jedrilice) koristi se škota glavnog jedra, vezana za donji dio buma. Škota glavnog jedra može biti fiksno učvršćena na palubi ili vezana za klizač koji se može pomicati lijevo-desno. Oblik glavnog jedra namješta se sustavom koji priteže bum prema palubi, tzv. vang (17). Neka klasična glavna jedra su opremljena konopom kojim se priteže prednji dio glavnog jedra (tzv. Cunningham) i na taj način se regulira dubina jedra.

Ispod razine površine vode nalaze se još kobilica (5), kormilo (6) i skeg (7). Sve jedrilice, osim malih sportskih, imaju kobilicu izrađenu od olova, ili imaju na dnu kobilice pričvršćen element punjen olovom. Time se jedrilici osigurava stabilnost, jer se pomoću težine kobilice

stvara protusila sili vjetra u jedrima. Kod malih sportskih jedrilica protusilu sili vjetra osigurava jedriličar težinom svoga tijela, naginjući se u privjetrini. Iza kobilice nalazi se kormilo, povezano ili direktno s rudom kormila (tzv. argolom) ili lančanicom s kolom kormila. Na većini jedrilica postavljaju se dva, međusobno povezana kola kormila.

### 1.1.2. Vrste jedrilica

Danas postoji veliki broj različitih vrsta jedrilica. Osim po veličini, jedrilice se mogu razlikovati po:

- konstrukciji trupa (jednotrupne, katamarane, trimarane),
- vrsti kobilice (puna, peraja, krilo, pomična),
- namjeni (sportska, regatna, za krstarenja),
- broju i izgledu jarbola te rasporedu jedara.

Najpoznatije jedrilice, od kojih su neke prikazane na Slici 1.2., koje se danas grade su:

- *Sloop* – jedrilica sa jednim jarbolom i dva jedra (glavno i prednje jedro), prikladna za jedrenje pomoću vjetra. Stabilnost ove vrste jedrilice ovisi o širini broda.
- *Ketch* – jedrilica vrlo slična *Sloopu*, koja ima dodatni manji jarbol.
- *Schooner* – jedrilica koja ima dva jarbola (glavni i prednji jarbol). Glavni jarbol s glavnim jedrom viši je od prednjeg jarbola s prednjim jedrom. Ova vrsta jedrilice je vrlo brza i treba malu posadu kako bi se moglo njome upravljati.
- *Catboat* – jedrilica sa samo jednim jedrom (prednjim). Za razliku od *Sloop* jedrilice, ova vrsta jedrilice nema glavno jedro. Jarbol je smješten u prednjem dijelu jedrilice.
- *Dinghy* – vrsta jedrilice koja se u većini slučajeva koristi za rekreaciju, te su vrlo popularni kod mladih zbog lakih manevara na vodi. Imaju tri jedra: glavno jedro, prednje jedro i dodatno trokutno jedro smješteno ispred prednjeg jedra.
- *Cutter* – jedrilica slična *Sloopu* koja ima jedan jarbol te dva ili više glavnih jedara. Jarbol je postavljen dalje od krme nego kod *Sloop* jedrilice, kako bi omogućio korištenje glavnih jedara. Ova vrsta jedrilica je uža i dublja od *Sloop* jedrilica, sa oštro formiranim trupom i jedrima veće proporcije. Stabilnost *Cuttera* postiže se uz pomoć velike kobilice.
- *Yawl* – jedrilica slična *Ketchu* sa manjim prednjim jarbolom.



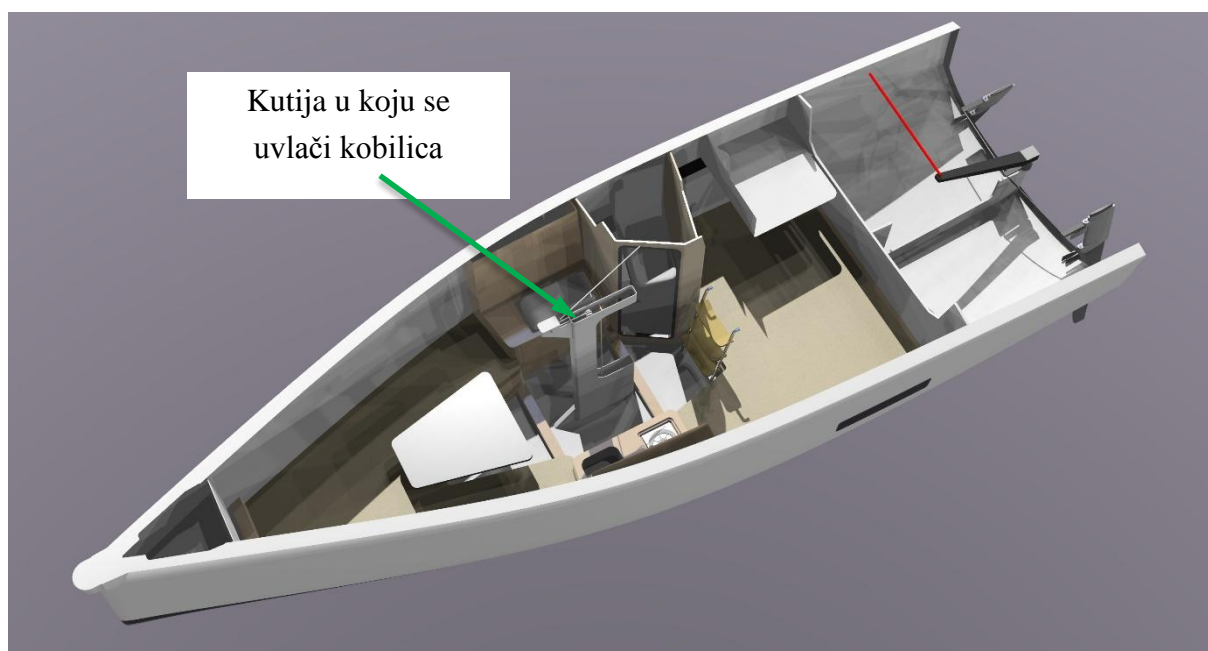
Slika 1.2. Neke vrste jedrilica [1]

## 1.2. Kobilica jedrilice

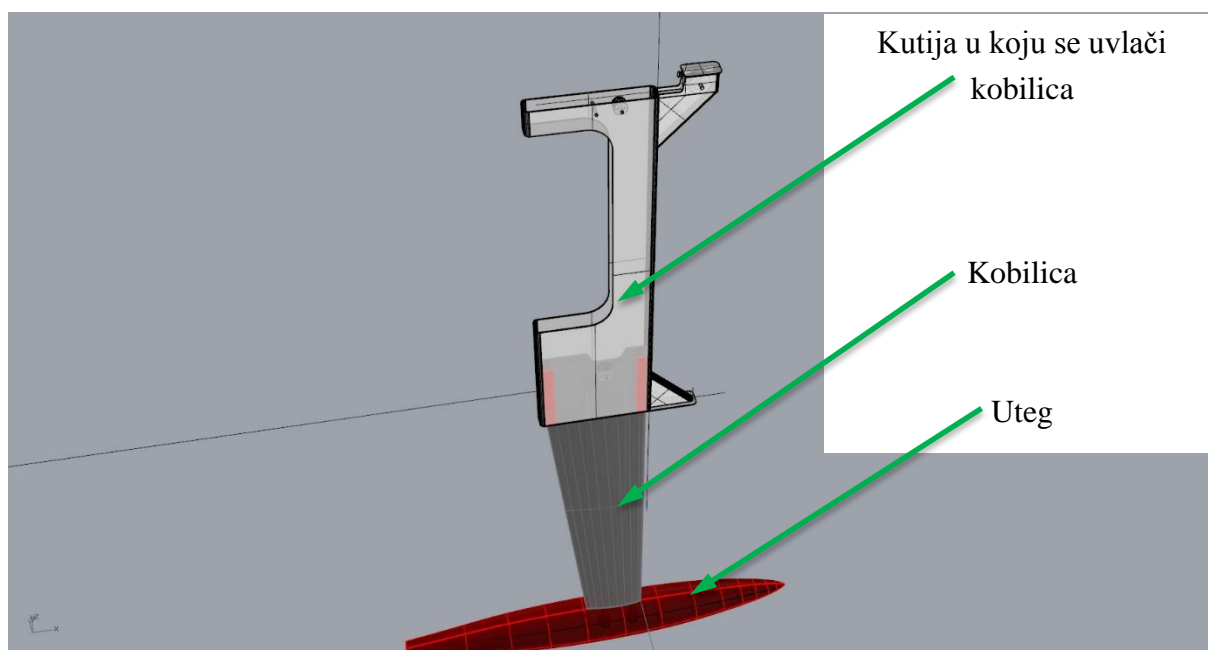
Kobilica je podvodna peraja kojom se zaustavlja bočno kretanje jedrilice u najtežim uvjetima. Današnje moderne jedrilice imaju tanke kobilice koje su teške i protežu se duboko u vodu te se nalaze samo na sredini jedrilice. U prošlosti kobilice su se protezale gotovo po cijeloj dužini jedrilice ispod vode. U posljednje vrijeme sve više do izražaja dolaze tzv. krilate kobilice (*engl. winged keel*) i kobilice s utegom. Krilate kobilice su kratke i ne protežu se duboko u vodu, a težinu imaju skoncentriranu u dvjema krilima koja se nalaze lijevo i desno od kobilice. Kobilice s utegom se izrađuju ako kobilica nema dovoljnu težinu kako bi stvarala dovoljnu protusilu sili vjetra. Na kraju kobilice postavlja se dodatni uteg, visoke mase. Kod velikih jedrilica, kobilica zajedno s utegom može imati i do 40% ukupne težine jedrilice

U ovome radu detaljno će se analizirati ponašanje kobilice s utegom prilikom plovidbe po vodi i kakva se opterećenja javljaju na njoj. Promatrana jedrilica će imati mogućnost uvlačenja kobilice u kutiju koja se nalazi u sredini jedrilice (Slika 1.3.). Kutija se u ovome radu neće posebno analizirati, već samo kobilica u slučaju kada je do kraja izvučena iz kutije, jer će se u tom slučaju javljati i najveća naprezanja na mjestu spoja kobilice i kutije. Detalj kobilice s utegom i kutije u koju se ona uvlači prikazan je na Slici 1.4.





**Slika 1.3. Prikaz jedrilice s označenom kutijom u koju se uvlači kobilica**



**Slika 1.4. Detalj kobilice s utegom i kutije u koju se uvlači**

### 1.3. Materijali za izradu lista kobilice

Kobilica se najčešće izrađuje od visokočvrstog čelika, no u posljednjih desetak godina došlo je do velike primjene kompozitnih materijala u brodogradnji, a naročito u zrakoplovstvu. U nastavku će biti detaljno opisane pojedine vrste materijala, budući da će se oni primjenjivati u ovome radu.

#### 1.3.1. Visokočvrsti čelik *Weldox*

*Weldox* je visokočvrsti ugljični čelik legiran silicijem, manganom, kromom, bakrom, niklom i molibdenom te još nekim elementima s manjim udjelima. Karakterizira ga iznimno visoka konvencionalna granica razvlačenja, kao i visoka vlačna čvrstoća. Zbog visokih mehaničkih svojstava pogodan je za izradu konstrukcija kod kojih postoje zahtjevi za što manjom masom. Nedostatak ove vrste čelika jest mala duktilnost, koja među ostalim otežava njegovu obradu u proizvodnji (npr. savijanje lima) što je potrebno uzeti u obzir pri izradi idejnog rješenja. Kao i ostale vrste čelika pripada grupi izotropnih materijala čija svojstva ne ovise o smjeru, tj. ponašanje materijala moguće je opisati Youngovim modulom elastičnosti i Poissonovim faktorom. Visokočvrsti čelik koji će se koristiti u ovome radu ima sljedeća materijalna svojstva:

$$\text{Youngovim modulom elastičnosti: } E = 207\,000 \text{ MPa}, \quad (1.1)$$

$$\text{Poissonov faktor: } \nu = 0,3, \quad (1.2)$$

$$\text{Granica razvlačenja: } \sigma_T = 700 \text{ MPa}. \quad (1.3)$$

#### 1.3.2. Kompozitni materijali

Kompozitni materijali se sastoje od dva osnovna konstituenta: vlakna i matrice koji čine slojeve koji su međusobno povezani i tako čine višeslojni kompozit (laminat). Vlakna su osnovni nosivi element kompozita i daju mu čvrstoću. Matrica drži vlakna zajedno, prenosi opterećenja na vlakno, daje vanjsku formu kompozitu i definira njegovo ponašanje s obzirom na djelovanje atmosfere. Vlakna su najčešće: ugljična, staklena, aramidna (npr. kevlar) i metalna, te čine 60 – 70 % volumnog udjela u kompozitu. Matrice mogu biti polimerne, ugljične, metalne (takvi se kompoziti nazivaju MMC engl. Metal Matrix Composites), keramičke i dr. Treba naglasiti da vlakna pored uobičajene konfiguracije dugih vlakana, mogu biti i kratka vlakna, whiskers, sfere i dr. Whiskers su kratka vlakna, izrazito velike čvrstoće, promjera do 10  $\mu\text{m}$  i duljine do 0.1 m. Njihova čvrstoća teoretski može iznositi i do 1/10 modula elastičnosti. Posebnu vrstu kompozita čini prepreg (ime dolazi od engl. PREimPREGnated) kod kojih su pletena vlakna natopljena matricom (najčešće polimernom). Prepreg se u pravilu koristi za proizvodnju kompozitnih komponenti u autoklavu. Ova je tehnologija vrlo zastupljena kod proizvodnje kompozitnih dijelova avionske konstrukcije [3].

U ovome radu korist će se laminat koji se sastoji od epoksidne matrice ojačane staklenim i/ili ugljičnim vlaknima. Laminat s ugljičnim vlaknima ima bolja mehanička svojstva, ali i veću cijenu zbog čega će se koristiti na mjestima najvećih naprezanja u konstrukciji, dok će se na

dijelovima konstrukcije koji nisu kritični koristiti staklena vlakna. U nastavku slijedi detaljan opis ugljičnih i staklenih vlakana te epoksidne matrice.

## **VLAKNA**

Vlakna imaju visoka mehanička svojstva koja su rezultat snažnih međuatomarnih sila koje vladaju u materijalima niskog atomskog broja i male gustoće (npr. ugljik, bor, aluminij, silicij). Vlakna mogu biti napravljena samo od tih elemenata, od njihovih međusobnih spojeva, ili spojeva s kisikom i dušikom. Kod ovih materijala nije izraženo plastično tečenje (kao kod metala), već se lom događa uslijed integralnog efekta djelovanja mikroskopskih pukotina, čiji se broj smanjuje smanjivanjem dimenzije vlakna. Materijal je u vlaknastoj formi, zbog čega ima vrlo mali volumen po metru duljine, te je vjerojatnost pojave pukotine obrnuto proporcionalna volumenu materijala. S druge strane, kod ovakvog je materijala znatno više izraženo odstupanje svojstava od referentnih vrijednosti. Ova neujednačenost mehaničkih svojstava predstavlja velik problem pri proračunu i izradi kompozitnih konstrukcija. Broj mikroskopskih pukotina može biti znatno smanjen tehnologijom izrade vlakana (veoma je važna čistoća sirovine od koje se vlakno pravi).

Najrasprostranjenija vlakna su danas ugljična (karbonska) vlakna, posebice kod mehanički najopterećenijih avionskih i brodskih konstrukcija. Treba naglasiti da je pogrešno nazivati ugljična vlakna grafitnim (grafit je jedan od oblika ugljika, kod kojeg su snažnim kovalentnim vezama povezane heksagonalne bazalne ravnine, dok je trodimenzionalna struktura postignuta njihovim međusobnim povezivanjem slabim Van der Waalsovima silama). Upravo ove sile omogućuju lako klizanje bazalnih ravnina jedne prema drugoj, što je i razlog zašto grafit ima svojstvo podmazivanja odnosno smanjivanja trenja. Za razliku od grafita, ugljična vlakna imaju samo dvodimenzionalnu strukturu.

Staklena se vlakna proizvode najčešće od silike (silicijevog dioksida,  $\text{SiO}_2$ ) različitim postupcima i u pravilu imaju slabija mehanička svojstva od ugljičnih vlakana. No vrlo su raširena u primjeni kod mehanički manje zahtjevnih konstrukcija zbog njihove manje cijene. Mogu se znatno razlikovati po svojstvima te se stoga označavaju kao A-staklo (ovakva su bila prva proizvedena vlakna, danas se vrlo rijetko koriste), C-staklo (koriste se zbog poboljšane otpornosti na kiseline i lužine), E-staklo (najčešće korištena, poboljšana otpornost na vlagu i blage kemikalije), S-staklo (povećana čvrstoća i modul elastičnosti, koriste se kod mehanički opterećenijih konstrukcija gdje su potrebni visoka specifična krutost i čvrstoća).

## **MATRICE**

Svojstva matrica izrazito su važna za određivanje uzdužne tlačne čvrstoće, poprečne vlačne čvrstoće kao i međuslojne posmične čvrstoće i obično se kaže da su ova svojstva uvjetovana matricom. Za kompozite se traži da dobro podnose temperature do  $150\text{ }^{\circ}\text{C}$ , a u iznimnim situacijama do  $200\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Prema tome, matrice najčešće određuju i svojstva cijeloga kompozita kao i ograničenja u primjeni. U slučaju izloženosti kompozita utjecajima okoline,

matrica je ona koja je prva izložena smanjenju mehaničkih svojstava, te njena svojstva značajno određuju ponašanje kompozita.

U proizvodnji kompozita najčešće se primjenjuju duromeri. Duromeri su vrsta polimera koji pri zagrijavanju stvaraju ireverzibilne kemijske veze među snažno umreženi polimernim lancima. Pri ponovnom zagrijavanju oni ne mijenjaju stanje, već ostaju kruti sve dok se pod djelovanjem visoke temperature potpuno ne razgrade, što je i njihov glavni nedostatak. Naime, nije ih moguće reciklirati, već samo mehanički usitniti čime se dobivaju sitne granule koje u sebi sadržavaju i vlakna i matricu.

Epoksidna smola vrsta je duromera koja se najčešće koristi u izradi matrica zbog lakog korištenja, niske cijene zbog svojih izvrsnih mehaničkih svojstava, dobre kemijske postojanosti, te zadržavanja dobrih mehaničkih svojstava i dimenzija pri povišenoj temperaturi i vlazi. Nadalje, dobro reagiraju (ostvaruju dobru adheziju) s većinom vrsta vlakana. Pri proizvodnji prolaze kroz period vrlo niske viskoznosti, što im omogućava vrlo široke tehnike proizvodnje. Epoksidi su najčešće dvokompozitni, pri čemu se u procesu proizvodnje dodaje očvršćivač koji postaje sastavni dio strukture matrice. Nakon miješanja epoksida i očvršćivača, pod djelovanjem topline dolazi do skrutnjavanja što se događa nekoliko sati. Konačna svojstva epoksidne matrice pokazuju izrazitu krhkost, što dovodi do znatne osjetljivosti obzirom na pojavu pukotina. Da bi se poboljšala ova svojstva, kao i otpornost vlazi i toplinska stabilnost, danas se epoksidima dodaju elastomeri kao i drugi tipovi polimera.

## 2. OSNOVNI POJMOVI MEHANIKE KOMPOZITNIH MATERIJALA

### 2.1. Tenzor elastičnosti

Tenzor elastičnosti daje vezu između Cauchyevog tenzora naprezanja i tenzora deformacije. Budući da su naprezanja i deformacije tenzori drugog reda, a tenzor elastičnosti četvrtog reda, vrijedi izraz:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.1)$$

Pomoću Voightove konvencije moguće je tenzor naprezanja i tenzor deformacije prikazati preko komponenti koristeći svojstvo simetrije tenzora:

$$\sigma_{ij} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12}]^T, \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{kl} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{12}]^T. \quad (2.3)$$

Tenzor elastičnosti se u najopćenitijom obliku zapisuje:

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{1222} \\ & & C_{3333} & C_{2333} & C_{1333} & C_{1233} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{1223} \\ & \text{sim.} & & & C_{1313} & C_{1213} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Vrlo često se koristi sažeti oblik, kada se parovi indeksa zamijene samo jednim indeksom. Tako se parovi indeksa 11, 22, 33, 23, 13 i 12 zamijene s indeksima 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Sukladno tome tenzori naprezanja i deformacije te tenzor elastičnosti se mogu zapisati u obliku:

$$\sigma_i = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6]^T, \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_j = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4 \quad \varepsilon_5 \quad \varepsilon_6]^T, \quad (2.6)$$

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{sim.} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Iz izraza (2.7) može se primijetiti da su komponente tenzora elastičnosti  $C_{ij}$  ( $j = 4, 5, 6$ ), 1/2 odgovarajućih komponenti istog tenzora kada je zapisan kao  $C_{ijkl}$ . Razlog tome je taj što je  $C_{ijkl}$  zapis tenzora četvrtog reda, koji bi imao 81 komponentu, ali zbog simetrije tenzora deformacije ( $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ ), simetrije tenzora naprezanja ( $C_{ijkl} = C_{jikl}$ ) i zbog simetrije samog tenzora elastičnosti ( $C_{ijkl} = C_{klij}$ ) broj konstanti se smanjuje na 21. Upravo je 21 maksimalni

broj materijalnih konstanti koje opisuju ponašanje elastičnog materijala, koji se još naziva anizotropni materijal.

Ako materijal ima dvije međusobno okomite ravnine elastične simetrije, tada su komponente tenzora elastičnosti u izrazu (2.4) koje imaju neparan broj indeksa 2 i 3 jednake nuli. Broj neovisnih konstanti se time smanjuje s 21 na 9, te se takav materijal naziva ortotropni materijal (kompozitni sloj primjer je ortotropnog materijala). Tenzor elastičnosti za takav materijal je:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

## 2.2. Tenzor podatljivosti

Inverzan tenzor tenzoru elastičnosti naziva se tenzor podatljivosti. Određuje se iz:

$$S_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1}. \quad (2.9)$$

Tenzor podatljivosti za ortotropni materijal najčešće se prikazuje preko inženjerskih konstanti:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Važno je napomenuti da je tenzor podatljivosti također simetričan, tj. vrijedi  $S_{ij} = S_{ji}$ . Iz toga proizlazi ovisnost Poissonovih faktora i Youngovih modula elastičnosti za različite smjerove:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}. \quad (2.11)$$

### 2.3. Reducirana matrica elastičnosti

Prilikom promatranja jednog sloja kompozitnog materijala, on se razmatra kao ortotropan i u ravninskom stanju naprezanja. Umjesto matrice elastičnosti  $C_{ij}$  koristi se reducirana matrica elastičnosti  $Q_{ij}$ , tj. u matičnom zapisu  $\mathbf{Q}$ :

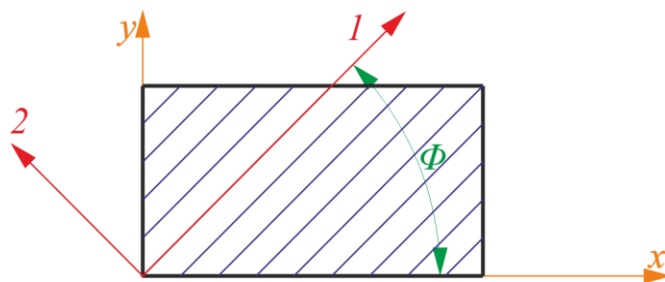
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ \text{sim.} & & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Elementi reducirane matrice elastičnosti ne mogu se dobiti direktno iz elemenata matrice  $C_{ij}$ . Naime, elementi reducirane matrice elastičnosti imaju manje vrijednosti od odgovarajućih elemenata matrice  $C_{ij}$ . Kako bi se odredili elementi reducirane matrice elastičnosti potrebno je najprije odrediti matricu elastičnosti  $C_{ij}$ . Zatim se iz matrice elastičnosti određuje matrica podatljivosti  $S_{ij}$ , prema izrazu (2.9), te križanjem 3, 4 i 5 retka i stupca u matrici podatljivosti se dobiva reducirana matrica podatljivosti. Inverz reducirane matrice podatljivosti predstavlja reduciranu matricu elastičnosti. Preko inženjerskih konstanti, za ortotropni materijal, ona se zapisuje u obliku:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_6 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

### 2.4. Koordinatni sustavi

Kod razmatranja jednog sloja kompozitnog materijala koriste se dva osnovna koordinatna sustava. Prvi sustav je sustav glavnih materijalnih osi (1,2), os 1 je u pravcu vlakana, dok je os 2 okomita na pravac vlakana. Drugi sustav je globalni koordinatni sustav (x,y) u kojemu se definiraju sile, momenti, naprezanja i deformacije za čitavi kompozit. Prikaz koordinatnih sustava je na Slici 2.1.



**Slika 2.1. Sustav glavnih materijalnih osi (1,2) i globalni koordinatni sustav (x,y) jednog sloja kompozita**

Kako bi se odredila naprezanja i deformacije za čitav kompozit potrebno je naprezanja i deformacije koja se javljaju u svakom sloju kompozita transformirati iz sustava glavnih materijalnih osi u globalni koordinatni sustav. To se vrši prema:

$$\begin{aligned}\sigma_{|x|} &= \mathbf{T}_{\sigma}^{-1} \sigma_{|i|} \\ \epsilon_{|x|} &= \mathbf{T}_{\epsilon}^{-1} \epsilon_{|i|}\end{aligned}\quad (2.14)$$

gdje su  $\sigma_{|x|}$  i  $\epsilon_{|x|}$  komponente tenzora naprezanja i deformacije u globalnom koordinatnom sustavu,  $\sigma_{|i|}$  i  $\epsilon_{|i|}$  komponente tenzora naprezanja i deformacije u sustavu glavnih materijalnih osi, a  $\mathbf{T}_{\sigma}$  i  $\mathbf{T}_{\epsilon}$  matrice transformacije tenzora naprezanja i tenzora deformacije iz sustava glavnih materijalnih osi u globalni koordinatni sustav. One su definirane izrazima:

$$\mathbf{T}_{\sigma} = \begin{bmatrix} \cos^2(\phi) & \sin^2(\phi) & 2\cos(\phi)\sin(\phi) \\ \sin^2(\phi) & \cos^2(\phi) & -2\cos(\phi)\sin(\phi) \\ -\cos(\phi)\sin(\phi) & \cos(\phi)\sin(\phi) & \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{T}_{\epsilon} = \begin{bmatrix} \cos^2(\phi) & \sin^2(\phi) & \cos(\phi)\sin(\phi) \\ \sin^2(\phi) & \cos^2(\phi) & -\cos(\phi)\sin(\phi) \\ -2\cos(\phi)\sin(\phi) & 2\cos(\phi)\sin(\phi) & \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Budući da je reducirana matrica elastičnosti  $\mathbf{Q}$  (2.13), definirana u sustavu glavnih materijalnih osi moguće je odrediti vezu između naprezanja i deformacije u tom sustavu:

$$\sigma_{|i|} = \mathbf{Q} \epsilon_{|i|}. \quad (2.17)$$

Na sličan način može se odrediti i veza između naprezanja i deformacije u globalnom koordinatnom sustavu:

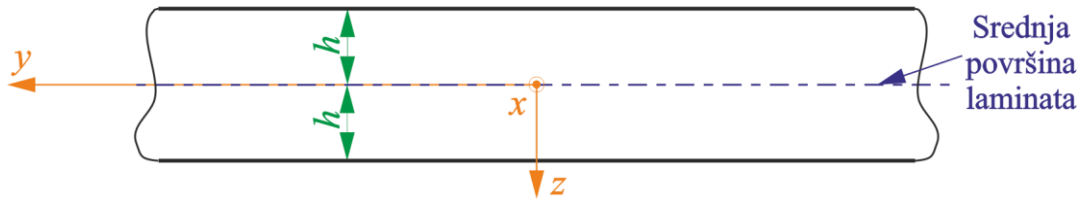
$$\sigma_{|x|} = \bar{\mathbf{Q}} \epsilon_{|x|}, \quad (2.18)$$

gdje je  $\bar{\mathbf{Q}}$  reducirana matrica elastičnosti definirana u globalnom koordinatnom sustavu. Iz izraza (2.14), (2.17) i (2.18) moguće je dobiti vezu između reducirane matrice elastičnosti u globalnom koordinatnom sustavu i sustavu glavnih materijalnih osi:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}_{\sigma}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}_{\epsilon}. \quad (2.19)$$



## 2.5. Sile i momenti u višeslojnom kompozitu (laminatu)



Slika 2.2. Način postavljanja koordinatnog sustava kod višeslojnog kompozita

Deformacija i naprezanje jednog sloja kompozita u globalnom koordinatnom sustavu može se prikazati u obliku:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\boldsymbol{\kappa}, \quad (2.20)$$

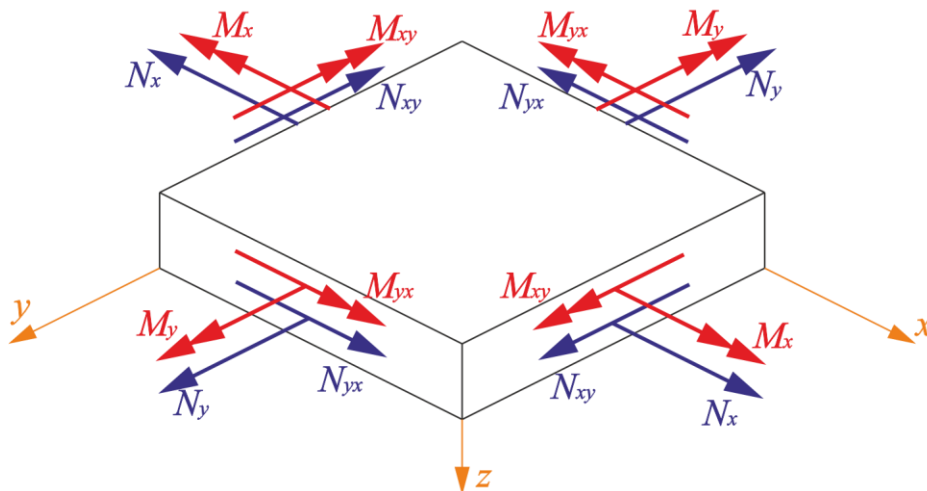
$$\boldsymbol{\sigma}_k = \bar{\mathbf{Q}}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k = \bar{\mathbf{Q}}_k [\boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\boldsymbol{\kappa}], \quad (2.21)$$

gdje je  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  deformacija srednje površine laminata, indeks  $k$  označava broj sloja u laminatu, a  $\boldsymbol{\kappa}$  predstavlja zakrivljenost srednje površine laminata. Zakrivljenost srednje površine dana je izrazima:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2.22)$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (2.23)$$

$$\kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.24)$$



Slika 2.3. Definicija momenta i sila u višeslojnom kompozitu

Slika 2.3 prikazuje sile i momente u kompozitu definirane u globalnom koordinatnom sustavu. Općenito, sile i momenti definirani su izrazima:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad (2.25)$$

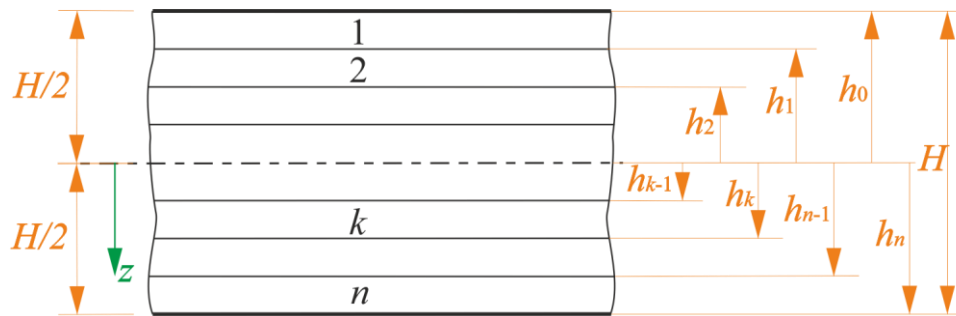
$$N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz \quad (2.26)$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz \quad (2.27)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad (2.28)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad (2.29)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz \quad (2.30)$$



Slika 2.4. Numeracija slojeva u višeslojnom kompozitu

Ukupna sila u laminatu određuje se sumiranjem svih sila koje djeluju u pojedinom sloju:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz. \quad (2.31)$$

Uvrštavanjem izraza (2.21) u (2.31) i sređivanjem dobiva se konačan izraz za sile u laminatu:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}, \quad (2.32)$$

gdje su matrice  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  definirane:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k (h_k - h_{k-1}), \quad (2.33)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k (h_k^2 - h_{k-1}^2). \quad (2.34)$$

Na isti način određuje se ukupni moment u laminatu:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k z dz. \quad (2.35)$$

Uvrštavanjem izraza (2.21) u (2.35) i sređivanjem dobiva se konačan izraz za moment u laminatu:

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}. \quad (2.36)$$

pri čemu je matrica  $\mathbf{D}$  definirana:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k (h_k^3 - h_{k-1}^3). \quad (2.37)$$

Matrice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{D}$  nazivaju se istezna (*engl. extensional*), spregnuta (*engl. coupling*) i savojna (*engl. bending*) krutost. Izrazi (2.32) i (2.36) mogu se zapisati u obliku submatrica:

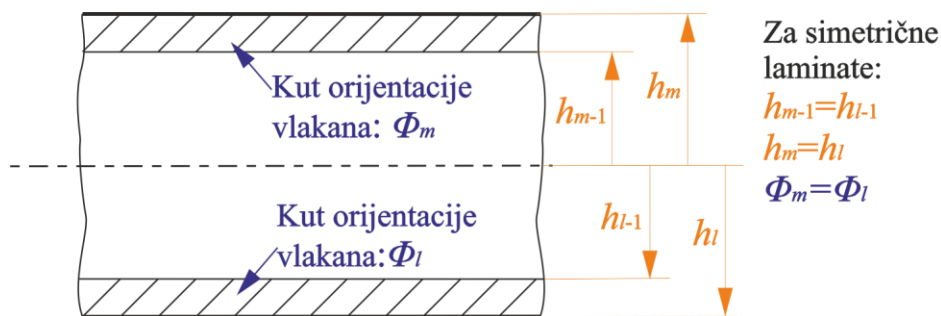
$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

odnosno prikazano sa svim elementima matrica:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & \text{sim.} & & & D_{22} & D_{26} \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

U praksi se najčešće primjenjuju simetrični laminati, tj. laminati kod kojih je svaki par slojeva jednako razmaknut od srednje površine i ima ista svojstva. Za takve laminat matrica spregnute krutosti jednaka je nuli, tj. prema Slici 2.5. je:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{Q}}_m (h_m^2 - h_{m-1}^2) - \bar{\mathbf{Q}}_l (h_l^2 - h_{l-1}^2)] = 0. \quad (2.40)$$



Slika 2.5. Raspodjela slojeva kod simetričnog laminata

## 2.6. Kriteriji popuštanja kompozita

Za razliku od izotropnih materijala (npr. čelik), kod kompozita su mehanizmi popuštanja materijala bitno drugačiji te se ne mogu opisati klasičnim pristupom kao krhki ili duktilni lom. Razlog tome je taj što se kod kompozita radi o spajanju velikog broja slojeva, a niti sam sloj nije homogen već se sastoji od barem dva konstituenta. Iz toga razloga se popuštanje može dogoditi na vrlo različite načine. Najčešće se razmatra lom matrice, pucanje i izvlačenje vlakna te delaminacija (odvajanje slojeva). Danas postoji veliki broj kriterija popuštanja kompozita, od kojih su najpoznatiji: kriterij maksimalnih naprežanja, kriterij maksimalnih deformacija, Tsai-Hill kriterij, Tsai-Wu kriterij, Puckov kriterij i Hashinov kriterij [3].

Kriteriji popuštanja postavljaju se uvijek za jedan sloj, a naprežanja koja ulaze u kriterije nisu glavne vrijednosti tenzora naprežanja već vrijednosti naprežanja u sustavu glavnih materijalnih osi. Pri tome je nužno poznavati pet parametara čvrstoće ili pet parametara deformacije, ako se postavlja kriterij pomoću dopuštenih deformacija. Parametri čvrstoće su:

- vlačna čvrstoća u pravcu vlakna ( $X_t$ ),
- tlačna čvrstoća u pravcu vlakna ( $X_c$ ),
- vlačna čvrstoća okomito na pravac vlakna ( $Y_t$ ),
- tlačna čvrstoća okomito na pravac vlakna ( $Y_c$ ),
- smična čvrstoća ( $S$ ).

Parametri deformacije su:

- dopuštena vlačna deformacija u pravcu vlakna ( $X_{\epsilon t}$ ),
- dopuštena tlačna deformacija u pravcu vlakna ( $X_{\epsilon c}$ ),
- dopuštena vlačna deformacija okomito na pravac vlakna ( $Y_{\epsilon t}$ ),
- dopuštena tlačna deformacija okomito na pravac vlakna ( $Y_{\epsilon c}$ ),
- dopuštena kutna deformacija ( $S_{\epsilon}$ ).

### 2.6.1. Tsai-Hill kriterij

Kriterij se koristi u slučaju troosnog stanja naprežanja i spada u skupinu energetskih kriterija popuštanja i govori da do popuštanja kompozitnog sloja neće doći ako je ispunjen uvjet:

$$(G+H)\sigma_1^2 + (F+H)\sigma_2^2 + (F+G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 < 1, \quad (2.41)$$

gdje se parametri  $F...N$  definiraju iz čvrstoće materijala tako da se razmatraju različiti slučajevi jednoosnog stanja naprežanja. Za slučaj jednog sloja kompozita, koji je u stanju ravninskog naprežanja, Tsai-Hill kriterij se svodi:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} < 1. \quad (2.42)$$

U izrazu (2.42) kod parametara čvrstoće nisu naznačeni indeksi jer se oni dodjeljuju ovisno o predznaku odgovarajućeg naprezanja.

### 2.6.2. Tsai-Wu kriterij

Kriterij se naziva tenzorski ili kvadratični kriterij popuštanja i jedan je od najčešće korištenih kriterija popuštanja. Govori da do popuštanja neće doći ako je:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j < 1. \quad (2.43)$$

Parametri  $F_i$  i  $F_{ij}$  definiraju se iz čvrstoće kompozita promatranjem različitih slučaja jednoosnog opterećenja. Tsai-Wu kriterij se najčešće koristi u obliku:

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 - \sqrt{F_{11} F_{22}} \sigma_1 \sigma_2 < 1. \quad (2.44)$$

Parametri iz izraza (2.44) određuju se iz čvrstoće kompozita prema:

$$F_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}, \quad (2.45)$$

$$F_{11} = -\frac{1}{X_t X_c}, \quad (2.46)$$

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}, \quad (2.47)$$

$$F_{22} = -\frac{1}{Y_t Y_c}, \quad (2.48)$$

$$F_{66} = \frac{1}{S^2}. \quad (2.49)$$

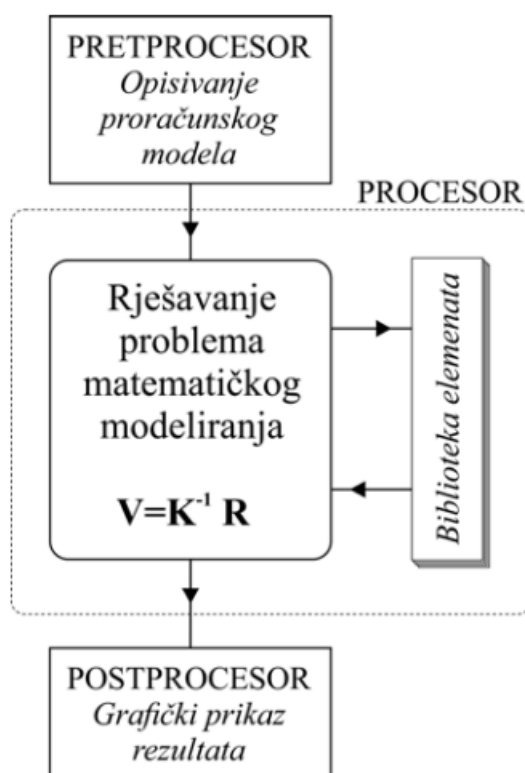
Karakteristike Tsai-Wu kriterija su da ne indicira način na koji će sloj popustiti već samo naprezanje kod kojeg će sloj popustiti. Nadalje, samo jedan izraz u kriteriju dovodi do znatno jednostavnije primjene, a prilikom određivanja najvećeg dopuštenog naprezanja kriterij će uvijek dati dva rješenja (jedno s pozitivnim a jedno s negativnim predznakom).

### 3. O METODI KONAČNIH ELEMENATA

Metoda konačnih elemenata približna je metoda pri kojoj se diferencijalne jednačbe, koje se pojavljuju kod klasičnih metoda, zamjenjuju sustavom algebarskih jednačbi. Metoda konačnih elemenata numerička je metoda koja se temelji na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma. Razmatrani kontinuum s beskonačno stupnjeva slobode gibanja zamjenjuje se s diskretnim modelom međusobno povezanih elemenata s ograničenim brojem stupnjeva slobode. Drugim riječima, područje kontinuuma dijeli se na konačan broj potpodručja koja se nazivaju konačni elementi, odnosno razmatrani kontinuum postaje mreža konačnih elemenata [4].

#### 3.1. Opis programa za računanje metodom konačnih elemenata

Rješavanje problema pomoću metode konačnih elemenata provodi se primjenom računala najčešće korištenjem postojećih programskih paketa. Glavni zadatak korisnika je izrada proračunskog modela i definiranje ulaznih podataka. Potrebno je imati na umu da je metoda konačnih elemenata približna metoda, a točnije rješenje može se postići samo uz pravilan odabir proračunskog modela te uz pravilan odabir konačnih elemenata [4]. Shematski prikaz rada računalnog programa prikazano je na Slici 3.1.



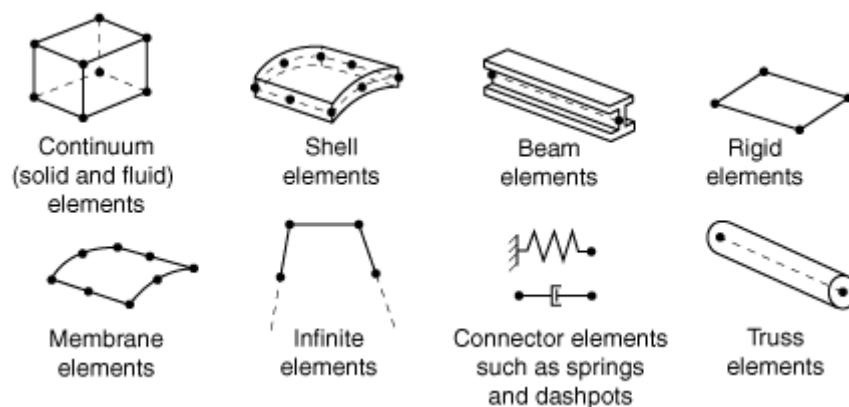
Slika 3.1. Shematski prikaz programa za konačne elemente [4]

### 3.2. Osnovni konačni elementi

Programski paketi koriste veliki broj različitih konačnih elemenata ovisno o obliku i nepoznatim parametrima. Jednostavniji konačni elementi koji se primjenjuju u mehanici deformabilnih tijela prema [15] su:

- jednodimenzijski konačni elementi
- dvodimenzijski konačni elementi
- trodimenzijski konačni elementi
- osnosimetrični konačni elementi
- izoparametarski konačni elementi
- konačni elementi za rješavanje problema savijanja ploča
- konačni elementi za analizu ljuskastih konstrukcija

Konačni elementi korišteni u proračunskom modelu bit će detaljnije pojašnjeni u nastavku, a neki od najčešće korištenih konačnih elemenata prikazani su na Slici 3.2.



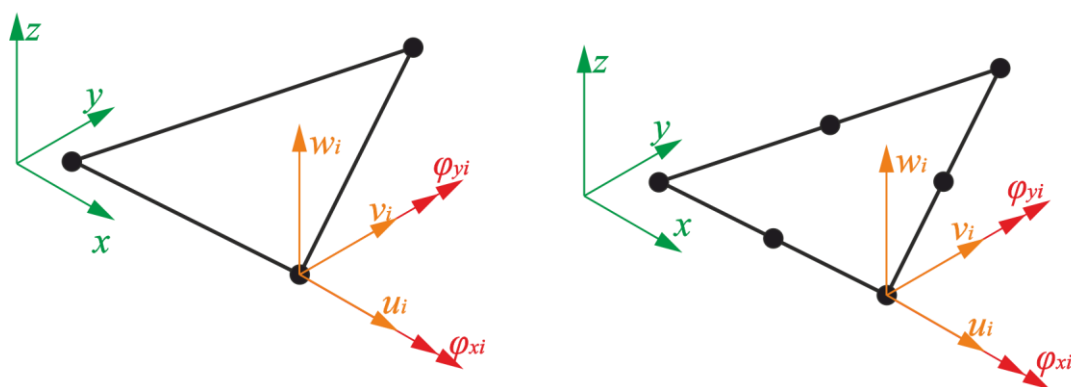
Slika 3.2. Najčešće korišteni konačni elementi u programskom paketu *Abaqus* [15]

### 3.3. Konačni elementi korišteni u proračunskom modelu

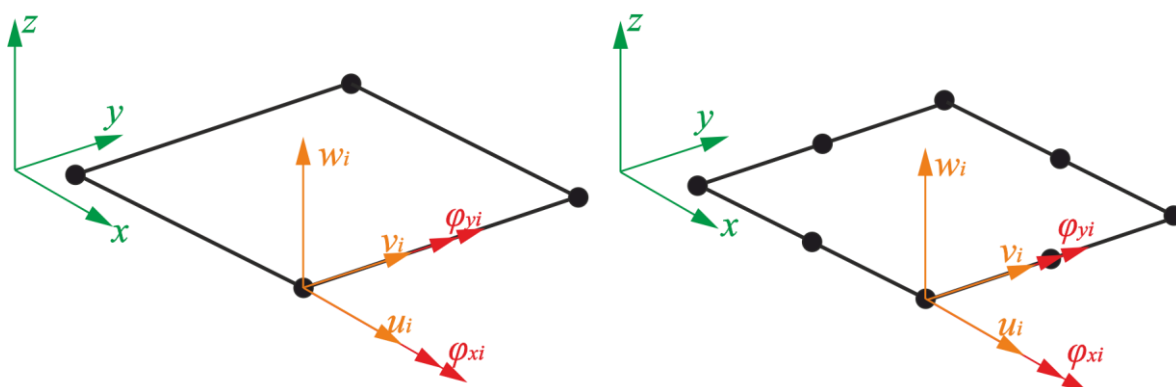
U radu će se koristiti ljuskasti konačni elementi za analizu tankih i debelih ploča, te trodimenzijski konačni elementi. Budući da će se promatrana kobilica moći razmatrati kao tanka i vitka konstrukcija u analizama pomaka i naprezanja najvećim dijelom koristit će se ljuskasti konačni elementi za analizu tankih ploča kako bi se što više uštedjelo na vremenu računanja. Kod izvedbe kobilice izrađene od visokočvrstog čelika analizirat će se i koncentracije naprezanja koja se javljaju u modelu, stoga će biti potrebno koristiti tehnike podmodeliranja kako bi se te koncentracije naprezanja dobro uhvatile i dodatno ispitala. Budući da ljuskasti konačni elementi ne mogu dobro uhvatiti te koncentracije naprezanja, podmodeli će biti diskretizirani trodimenzijskim konačnim elementima. Naravno, doći će do problema nekompatibilnosti stupnjeva slobode između ljuskastih konačnih elemenata za analizu tankih ploča i trodimenzijskih konačnih elemenata na rubovima podmodela. Prema tome, bit će potrebno provesti dodatnu analizu globalnog modela s ljuskastim konačnim elementima za analizu debelih ploča, koji imaju šest stupnjeva slobode po čvoru, da se izbjegne problem nekompatibilnosti.

### 3.3.1. Ljuskasti konačni elementi za analizu tankih ploča i ljusaka

Trokutni ljuskasti konačni elementi za analizu tankih ploča i ljusaka prvog i drugog reda su elementi koji imaju 3, odnosno 6 čvora. Za razliku od njih, četverokutni ljuskasti konačni elementi za analizu tankih ploča i ljusaka prvog i drugog reda su elementi koji imaju 4, odnosno 8 čvora. Svi navedeni elementi imaju po 5 stupnjeva slobode u svakome čvoru, te je svaki izveden pomoću reducirane integracije. Ljuskasti konačni elementi s 5 stupnjeva slobode se koriste se kada mogu pretpostaviti Kirchhoff-Loveove pretpostavke o tankim ljuskama, odnosno da je odnos debljine ploče i najmanje dimenzije ljuske 0,05. Budući da će se u radu moći uzeti ta pretpostavka, koristit će se upravo takvi konačni elementi. Stupnjevi slobode koji se javljaju u svakome čvoru su 3 komponente pomaka i 2 komponente zakreta u ravnini elementa. Reducirana integracija se koristi iz razloga da se osigura bolje rješenje kod manjeg broja elemenata (ako elementi nisu distordirani) i značajno smanji vrijeme računanja, pogotovo u slučaju 3D načina opterećenja. Prikaz trokutnih i četverokutnih ljuskastih konačnih elemenata za analizu tankih ljusaka je na Slikama 3.3. i 3.4. U radu će se također koristiti četverokutni ljuskasti konačni elementi za analizu debelih ljusaka, koji se razlikuju po tome što imaju još jedan dodatan stupanj slobode (zakret okomito na ravninu elementa).



Slika 3.3. Trokutni konačni elementi prvog (lijevo) i drugog (desno) reda za analizu tankih ljusaka



Slika 3.4. Četverokutni konačni elementi prvog (lijevo) i drugog (desno) reda za analizu tankih ljusaka

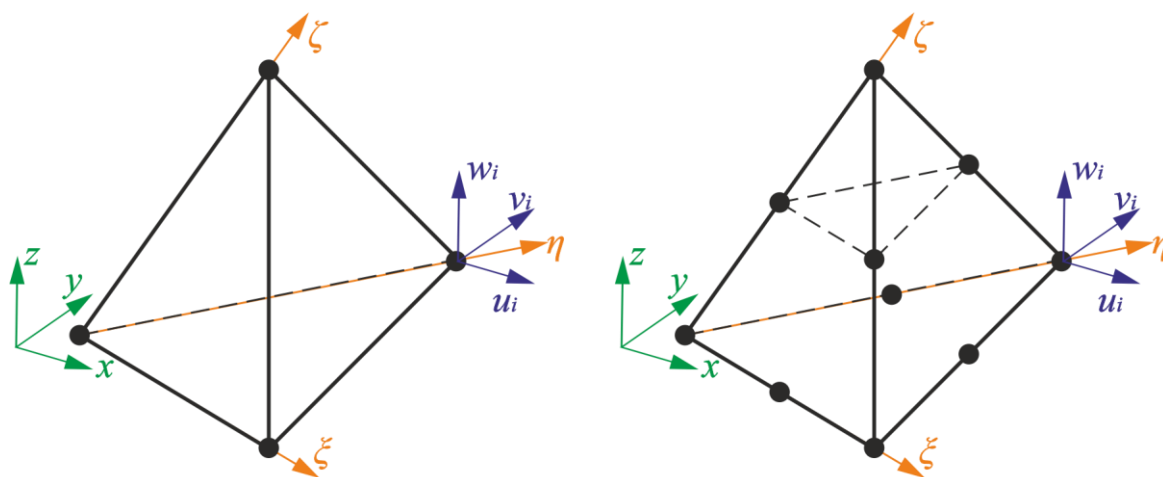


### 3.3.2. Trodimenzijski konačni elementi

Tetraedarski konačni element je najjednostavniji konačni element za trodimenzijsku analizu. Za verifikaciju modela bit će korišteni tetraedarski elementi prvog i drugog reda. Funkcije oblika prikazuju se u prirodnim koordinatama  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$  čije se ishodište nalazi u jednom vrhu elementa.

Tetraedarski konačni element prvog reda sastoji se od 4 čvora koji sadrže po 3 stupnja slobode u svakom čvoru, što znači da ima ukupno 12 stupnjeva slobode. Pomoću tih stupnjeva slobode moguće je unutar zadanog elementa opisati pomake pomoću potpunog polinoma prvog stupnja. Ovi konačni elementi mogu opisati linearno raspodjelu pomaka, odnosno konstantnu raspodjelu polja deformacije i naprezanja. Ovi elementi pripadaju u skupinu konformnih elemenata te je za njih zadovoljen uvjet kompatibilnost pomaka po plohama. Također je zadovoljen uvjet opisivanja pomaka krutog tijela i stanje konstantne deformacije, čime je ispunjen zahtjev za monotonu konvergenciju.

Tetraedarski konačni element drugog reda sastoji se od 10 čvora koji sadrže po 3 stupnja slobode u svakom čvoru, što znači da ima ukupno 30 stupnjeva slobode. Pomoću tih stupnjeva slobode moguće je unutar zadanog elementa opisati pomake pomoću potpunog polinoma drugog stupnja. Element može opisati kvadratnu raspodjelu pomaka, odnosno linearnu raspodjelu polja deformacije i naprezanja. I za ove su elemente ispunjeni svi potrebni uvjeti za monotonu konvergenciju, tj. moguće je opisati pomake krutog tijela i stanje konstantnih deformacija te je zadovoljen uvjet kompatibilnosti pomaka duž rubova susjednih elemenata. Ovi elementi su jako pogodni kada se želi opisati zakrivljena geometrija.



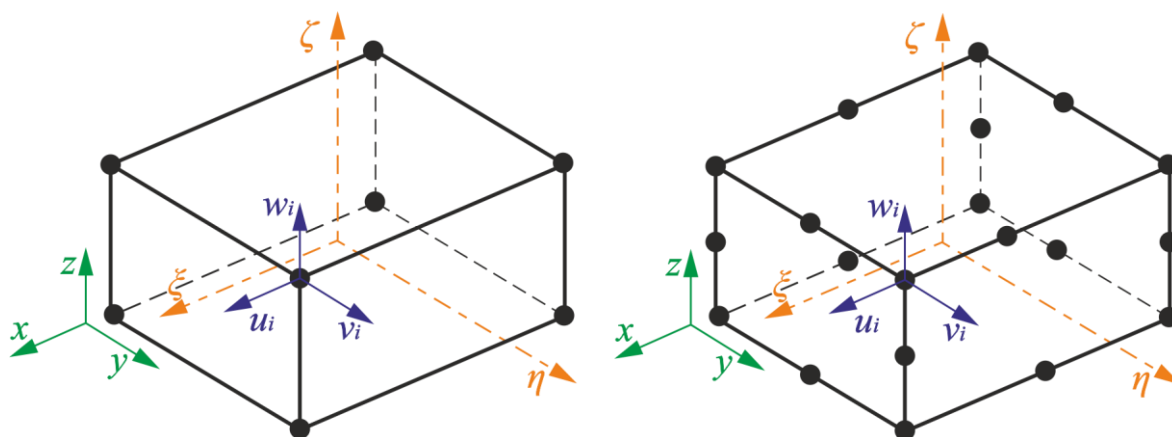
Slika 3.5. Tetraedarski konačni elementi prvog (lijevo) i drugog (desno) reda

Heksaedarski konačni elementi imaju veliku primjenu u trodimenzijskoj analizi. Najčešće se primjenjuje heksaedarski element u obliku paralelopipeda. Osnovna prednost heksaedarskih elemenata u odnosu na tetraedarske elemente je ta što uz isti broj stupnjeva slobode daju veću točnost. Ovdje će za potrebe verifikacije modela biti prikazani heksaedarski element prvog reda

i heksaedarski element drugog reda. Funkcije oblika prikazuju se u prirodnim koordinatama  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$  čije se ishodište nalazi u težištu elementa.

Heksaedarski element prvog reda sastoji se od 8 čvorova sa po 3 stupnja slobode u svakom čvoru, što znači da ima ukupno 24 stupnja slobode. Raspodjela pomaka opisana je nepotpunim polinomima trećeg stupnja. Element opisuje kvadratnu raspodjelu pomaka, odnosno linearno raspodjelu polja deformacije, a time i naprezanja, što je prednost na tetraedarski element prvog reda. Takva raspodjela pomaka omogućuje monotonu konvergenciju rješenja, ali im je nedostatak nepotpunost polinoma funkcija pomaka.

Heksaedarski element drugog reda sastoji se od 20 čvorova s po 3 stupnja slobode u svakom čvoru, što znači da ima ukupno 60 stupnjeva slobode. Kod ovog konačnog elementa čvorovi su raspodijeljeni isključivo duž bridova elemenata. Na taj je način, uz jednaku raspodjelu pomaka duž bridova, znatno smanjen ukupan broj stupnjeva slobode elementa. I ovdje su ispunjeni svi potrebni uvjeti za monotonu konvergenciju rješenja.



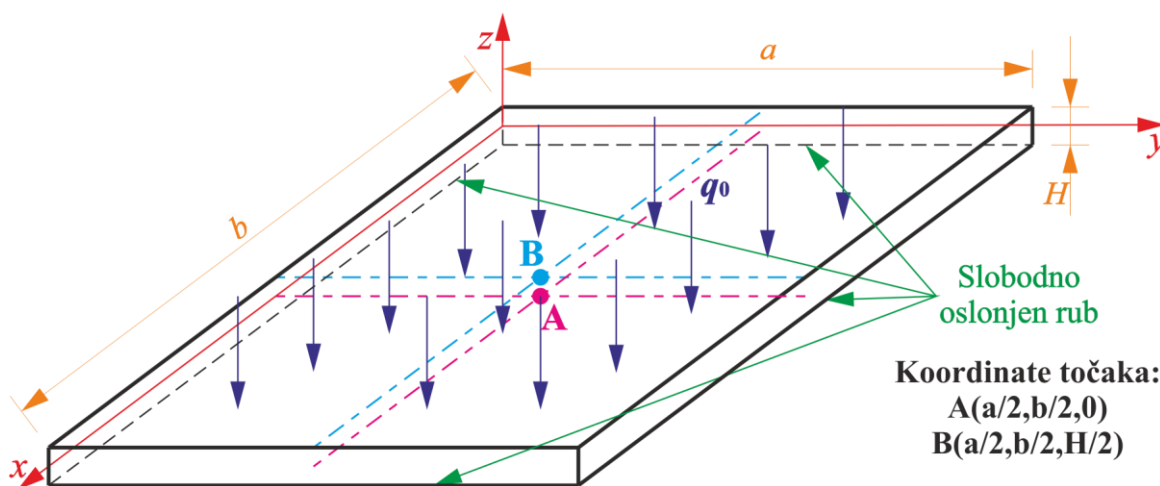
Slika 3.6. Heksaedarski konačni elementi prvog (lijevo) i drugog (desno) reda

## 4. VERIFIKACIJA NUMERIČKOG MODELA

Verifikacija korištenih konačnih elemenata bit će provedena na pravokutnoj ploči koja će u prvom slučaju biti opterećena na savijanje, a u drugome na izvijanje. Svaka analiza će biti provedena za dvije vrste materijala. Za izotropnu ploču (napravljenju od čelika) i za kompozitnu (napravljenju od 2 sloja kompozitnog materijala). Kod savijanja ploča pratit će se konvergencija progiba u sredini ploče te maksimalno normalno naprezanje u smjeru  $x$ -osi, dok će se kod izvijanja ploča pratiti potrebna kritična sila izvijanja koja se mora javiti da dođe do gubitka stabilnosti.

### 4.1. Analitička rješenja

#### 4.1.1. Izotropna ploča opterećena na savijanje



Slika 4.1. Pravokutna izotropna ploča slobodno oslonjena na vanjskom rubu opterećena jednoliko kontinuirano

Diferencijalna jednadžba savijanja izotropne pravokutne ploče prema [5] i [6] glasi:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_z(x, y)}{D}, \quad (4.1)$$

gdje je  $D$  fleksijska krutost izotropne ploče koja se računa prema:

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.2)$$

Za pravokutnu ploču, slobodno oslonjenu po svim rubovima (Slika 4.1.), progib i opterećenje se prikazuju u obliku:

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w^{jk} \sin\left(j\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(k\pi \frac{y}{b}\right), \quad (4.3)$$

$$q_z(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_z^{jk} \sin\left(j\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(k\pi \frac{y}{b}\right), \quad (4.4)$$

gdje su  $w^{jk}$  i  $q_z^{jk}$  Furierovi koeficijenti za progib i opterećenje koji se odnose na član  $(j, k)$ . Izrazi (4.3) i (4.4) moraju zadovoljavati rubne uvjete slobodno oslonjene ploče koji govore da progib i moment savijanja duž ruba mora biti jednak nuli. Matematički se ti rubni uvjeti zapisuju:

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ \nabla^2 w &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Kako na rubovima vrijedi  $x = 0$  i  $x = a$ , odnosno  $y = 0$  i  $y = b$ , moguće je zaključiti da će izrazi (4.3) i (4.4) će zadovoljavati rubne uvjete (4.5), budući da su vrijednosti sinusa za  $0, \pi, 2\pi$  jednaki nula. Furierovi koeficijenti za progib određuju se uvrštavanjem izraza (4.3) i (4.4) u izraz (4.1), dok se Furierov koeficijent za opterećenje određuje iz izraza (4.4) razmatranjem različitih indeksa  $j, k$  koji određuju odgovarajući član trigonometrijskog reda. Konačni izrazi iz kojih se određuju glase:

$$w^{jk} = \frac{1}{\pi^4 D} \frac{q_z^{jk}}{\left[ \left( \frac{j}{a} \right)^2 + \left( \frac{k}{b} \right)^2 \right]^2}, \quad (4.6)$$

$$q_z^{jk} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_z(x, y) \sin\left(j\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(k\pi \frac{y}{b}\right) dy dx. \quad (4.7)$$

Za slučaj jednolikog kontinuiranog opterećenja vrijedi da je:

$$q_z(x, y) = q_0, \quad (4.8)$$

pa izraz (4.7) postaje:

$$q_z^{jk} = \frac{4q_0}{jk\pi^2} [\cos(j\pi) - 1][\cos(k\pi) - 1]. \quad (4.9)$$

Ako se u izrazu (4.9) za  $j, k$  uzima paran broj slijedi da je  $q_z^{jk} = 0$ . U slučaju kada su  $j, k$  neparan broj slijedi da je Furierov koeficijent opterećenja:

$$q_z^{jk} = \frac{16q_0}{\pi^2 jk} \quad (4.10)$$

Uvrštavanjem izraza (4.10) u (4.6), te uvrštavanjem izraza (4.6) u (4.3), slijedi konačan izraz za funkciju progiba pravokutne izotropne ploče:

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(j\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(k\pi \frac{y}{b}\right)}{jk \left[ \left( \frac{j}{a} \right)^2 + \left( \frac{k}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (4.11)$$

Nadalje, funkcije promjene momenata za pravokutnu izotropnu ploču računaju se prema:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (4.12)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (4.13)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (4.14)$$

dok se funkcije promjene naprezanja za pravokutnu izotropnu ploču računaju prema:

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{H^3} z, \quad (4.15)$$

$$\sigma_y = \frac{12M_y}{H^3} z, \quad (4.16)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{12M_{xy}}{H^3} z, \quad (4.17)$$

gdje je  $z$  koordinata po debljini ploče od središnje plohe, a  $H$  debljina ploče.

Kako bi se napravila usporedba numeričkog rješenja dobivenog u Abaqusu s analitičkim rješenjem, potrebno je zadati numeričke vrijednosti za materijalna svojstva izotropne ploče i vrijednost opterećenja koji će djelovati na ploču. Odabrana svojstva materijala i opterećenja prikazani su u Tablici 4.1.

**Tablica 4.1. Materijal, dimenzije i opterećenje izotropne ploče**

Naziv veličine	Oznaka	Iznos	Mjerna veličina
<b>Modul elastičnosti</b>	$E$	210000	N/mm <sup>2</sup>
<b>Poissonov faktor</b>	$\nu$	0,3	–
<b>Širina ploče</b>	$a$	100	mm
<b>Duljina ploče</b>	$b$	100	mm
<b>Debljina ploče</b>	$H$	2	mm
<b>Konstantni tlak</b>	$q_0$	0,1	N/mm <sup>2</sup>

Kod usporedbe s numeričkim rješenjem pratit će se progib i normalno naprezanje u smjeru  $x$ -osi na vanjskoj površini ploče u točki A prema Slici 4.1. Za točku A vrijedi:

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, \quad (4.18)$$

dok je iznos  $z$  koordinate za koju će se računati naprezanje jednako polovici visine ploče. Uvrštavanjem zadanih podataka iz Tablice 4.1. u izraz za progib (4.11) slijedi:

$$w(x, y) = 1,08177 \cdot 10^{-8} \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(j \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right)}{jk \left[ \left(\frac{j}{100}\right)^2 + \left(\frac{k}{100}\right)^2 \right]^2}, \quad (4.19)$$

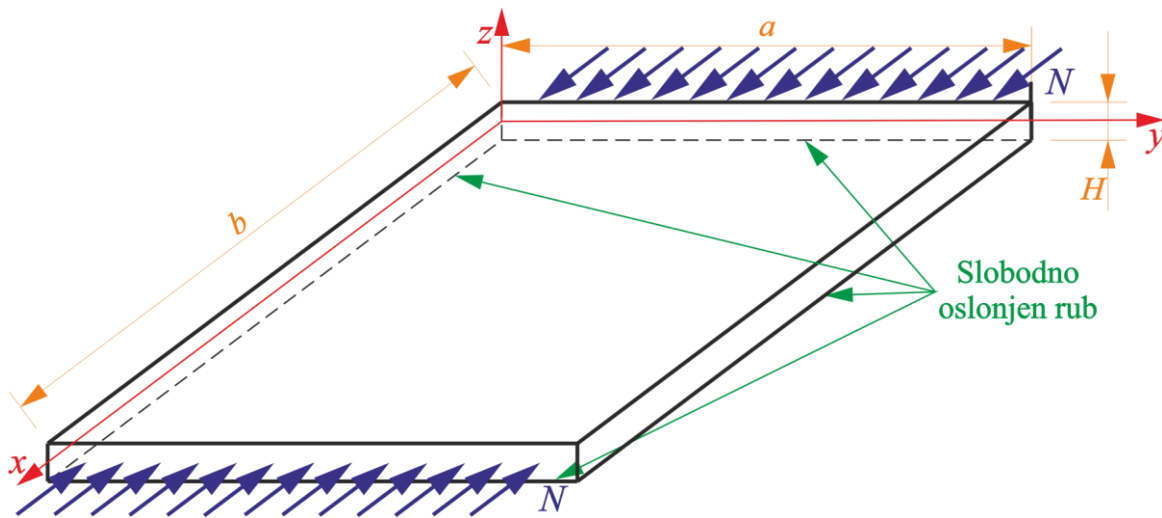
Izrazi (4.19) ovisi još o parametrima  $(j, k)$ . Kako bi se osigurala odgovarajuća točnost rješenja uzeta su prva četiri člana za  $(j, k)$ , tj. 1, 3, 5 i 7. Zbrajanjem svih dobivenih članova slijede konačne vrijednosti za progib izotropne ploče u točki A:

$$w = -0,2645 \text{ mm}. \quad (4.20)$$

Deriviranjem izraza (4.11) u skladu s izrazom (4.12), uvrštavanjem podataka iz Tablice 4.1. i uzimanjem prva četiri člana za  $(j, k)$  na isti način kao što se uzelo za progib, dobiva se vrijednost normalnog napreznja u smjeru osi  $x$  u točki B izotropne ploče:

$$\sigma_x = 71,545 \text{ N/mm}^2. \quad (4.21)$$

#### 4.1.2. Izotropna ploča opterećena na izvijanje



Slika 4.2. Pravokutna izotropna ploča slobodno oslonjena na vanjskom rubu opterećena na izvijanje

Diferencijalna jednadžba izvijanja izotropne pravokutne ploče prema [7] i [8] glasi:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( -N_{kr} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (4.22)$$

Za pravokutnu ploču, slobodno oslonjenu po svim rubovima (Slika 4.2.), progib se prikazuje prema izrazu (4.3), ali će zbog preglednosti biti ovdje ponovno napisan:

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w^{jk} \sin \left( j \pi \frac{x}{a} \right) \sin \left( k \pi \frac{y}{b} \right). \quad (4.23)$$

Uvrštavanjem izraza (4.23) u (4.22) slijedi izraz za izračunavanje kritične sile izvijanja za izotropnu ploču:

$$N_{kr} = \frac{D \pi^2}{b^2} \left( j \frac{b}{a} + \frac{k^2}{j} \frac{a}{b} \right)^2. \quad (4.24)$$

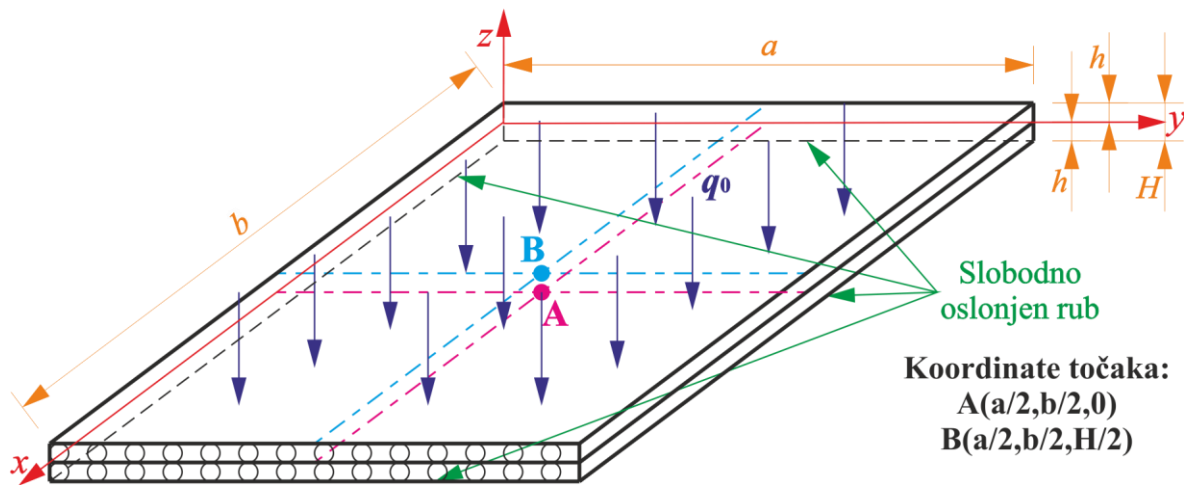
Iz izraza (4.24) moguće je zaključiti da će se najniža vrijednost za kritičnu silu izvijanja dobiti kada su  $j, k$  jednaki jedinici. U tom slučaju, izraz za najnižu kritičnu silu izvijanja je:

$$N_{kr} = \frac{D\pi^2}{b^2} \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2. \quad (4.25)$$

Uvrštavanjem podataka iz Tablice 4.1. u izraz (4.25) dobiva se vrijednost za najnižu kritičnu silu izvijanja izotropne ploče:

$$N_{kr} = 607,36 \text{ N/mm}. \quad (4.26)$$

#### 4.1.3. Kompozitna ploča opterećena na savijanje



**Slika 4.3. Pravokutna kompozitna ploča slobodno oslonjena na vanjskom rubu opterećena jednoliko kontinuirano**

Simetrični laminati najviše se danas koriste. Ovdje će biti izvedena funkcija progiba za tu vrstu laminata. Laminat će imati ukupno dva sloja kojima je pravac vlakana pod kutem od  $0^\circ$  u odnosu na  $x$ -os. Diferencijalna jednačba savijanja takvog laminata prema [9] i [10] glasi:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q_z(x, y), \quad (4.27)$$

gdje su parametri  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  i  $D_{66}$  komponente matrice savojne krutosti definirane u poglavlju 2.5. Za laminat, tj. pravokutnu ploču, slobodno oslonjenu po svim rubovima (Slika 4.3.), progib i opterećenje se prikazuju na isti način kao i za izotropnu ploču u obliku:

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w^{jk} \sin\left(j\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(k\pi \frac{y}{b}\right) \quad (4.28)$$

$$q_z(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_z^{jk} \sin\left(j\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(k\pi \frac{y}{b}\right) \quad (4.29)$$

gdje su  $w^{jk}$  i  $q_z^{jk}$  Furierovi koeficijenti za progib i opterećenje koji se odnose na član  $(j, k)$ . Izrazi (4.28) i (4.29) moraju zadovoljavati rubne uvjete slobodno oslonjene ploče koji govore

da progib i moment savijanja duž ruba mora biti jednak nuli. Matematički se ti rubni uvjeti zapisuju:

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ \nabla^2 w &= 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Kako na rubovima vrijedi  $x=0$  i  $x=a$ , odnosno  $y=0$  i  $y=b$ , moguće je zaključiti da će izrazi (4.28) i (4.29) zadovoljavati rubne uvjete (4.30), budući da su vrijednosti sinusa za  $0, \pi, 2\pi$  jednaki nula. Furierovi koeficijenti za progib određuju se uvrštavanjem izraza (4.28) i (4.29) u izraz (4.27), dok se Furierov koeficijent za opterećenje određuje iz izraza (4.29) razmatranjem različitih indeksa  $j, k$  koji određuju odgovarajući član trigonometrijskog reda. Konačni izrazi iz kojih se određuju glase:

$$w^{jk} = \frac{1}{\pi^4} \frac{q_z^{jk}}{\left[ D_{11} \left( \frac{j}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{jk}{ab} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{k}{b} \right)^4 \right]}, \quad (4.31)$$

$$q_z^{jk} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_z(x, y) \sin\left(j\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(k\pi \frac{y}{b}\right) dy dx. \quad (4.32)$$

Za slučaj jednolikog kontinuiranog opterećenja vrijedi da je:

$$q_z(x, y) = q_0, \quad (4.33)$$

pa izraz (4.33) postaje:

$$q_z^{jk} = \frac{4q_0}{jk\pi^2} [\cos(j\pi) - 1][\cos(k\pi) - 1]. \quad (4.34)$$

Ako se u izrazu (4.34) za  $j, k$  uzima paran broj slijedi da je  $q_z^{jk} = 0$ . U slučaju kada su  $j, k$  neparan broj slijedi da je Furierov koeficijent opterećenja:

$$q_z^{jk} = \frac{16q_0}{\pi^2 jk} \quad (4.35)$$

Uvrštavanjem izraza (4.35) u (4.31), te uvrštavanjem izraza (4.31) u (4.28), slijedi konačan izraz za funkciju progiba simetričnog laminata koji ima ukupno dva sloja kojima je pravac vlakana pod kutem od  $0^\circ$  u odnosu na  $x$ -os:

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6} \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(j\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(k\pi \frac{y}{b}\right)}{jk \left[ D_{11} \left( \frac{j}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{jk}{ab} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{k}{b} \right)^4 \right]}. \quad (4.36)$$

Nadalje, funkcije promjene momenata za simetrični laminat, koji ima ukupno dva sloja kojima je pravac vlakana pod kutem od  $0^\circ$  u odnosu na  $x$ -os računaju se prema:

$$M_x = D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (4.37)$$

$$M_y = D_{21}\kappa_x + D_{22}\kappa_y = -D_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (4.38)$$



$$M_{xy} = D_{66} \kappa_{xy} = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (4.39)$$

gdje  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$  i  $\kappa_{xy}$  predstavljaju zakrivljenost ploče, definirane izrazima (2.22), (2.23) i (2.24), dok se funkcije promjene naprezanja za laminat računaju prema:

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{H^3} z \quad (4.40)$$

$$\sigma_y = \frac{12M_y}{H^3} z \quad (4.41)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{12M_{xy}}{H^3} z \quad (4.42)$$

gdje je  $z$  koordinata po debljini ploče od središnje plohe, a  $H$  ukupna debljina laminata.

Kako bi se napravila usporedba numeričkog rješenja iz Abaqusa s analitičkim rješenjem, potrebno je zadati numeričke vrijednosti za materijalna svojstva laminata i vrijednost opterećenja koji će djelovati na laminat. Odabrana svojstva materijala i opterećenja prikazani su u Tablici 4.2.

**Tablica 4.2. Materijal, dimenzije i opterećenje laminata**

Naziv veličine	Oznaka	Iznos	Mjerna veličina
<i>Modul elastičnosti u smjeru vlakana</i>	$E_1$	29700	N/mm <sup>2</sup>
<i>Modul elastičnosti okomito na smjer vlakana</i>	$E_2$	29700	N/mm <sup>2</sup>
<i>Modul smicanja</i>	$G_6$	5300	N/mm <sup>2</sup>
<i>Poissonov faktor</i>	$\nu_{12}$	0,17	–
<i>Širina ploče</i>	$a$	100	mm
<i>Duljina ploče</i>	$b$	100	mm
<i>Debljina jednog sloja laminata</i>	$h$	1	mm
<i>Konstantni tlak</i>	$q_0$	0,1	N/mm <sup>2</sup>

Kod usporedbe s numeričkim rješenjem pratit će se progib i normalno naprezanje u smjeru  $x$ -osi na vanjskoj površini ploče u točki A prema Slici 4.1. Za točku A vrijedi:

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad (4.43)$$

dok je iznos  $z$  koordinate za koju će se računati naprezanje jednako polovici ukupne visine ploče. Prije nego što se može izračunati progib laminata, potrebno je odrediti vrijednost komponenti matrice savojne krutosti ( $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  i  $D_{66}$ ). Prema izrazu (2.37) one su:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k (h_k^3 - h_{k-1}^3), \quad (4.44)$$

gdje je matrica reducirane elastičnosti u globalnom koordinatnom sustavu ( $\bar{\mathbf{Q}}$ ) definirana izrazom (2.19), tj.:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}_\varepsilon, \quad (4.45)$$

a matrice reducirane elastičnosti u sustavu glavnih materijalnih osi ( $\mathbf{Q}$ ) izrazom (2.13), tj.:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_6 \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Dakle, kako bi se odredila matrica reducirane elastičnosti u globalnom koordinatnom sustavu, a time i matrica savojne krutosti potrebno je odrediti matrice transformacije  $\mathbf{T}_\sigma$  i  $\mathbf{T}_\varepsilon$ . One su definirane izrazima (2.15) i (2.16). Kako je kut između osi globalnog koordinatnog sustava i sustava glavnih materijalnih osi jednak nuli (Slika 4.4. lijevo), matrice transformacije postaju jedinične matrice:

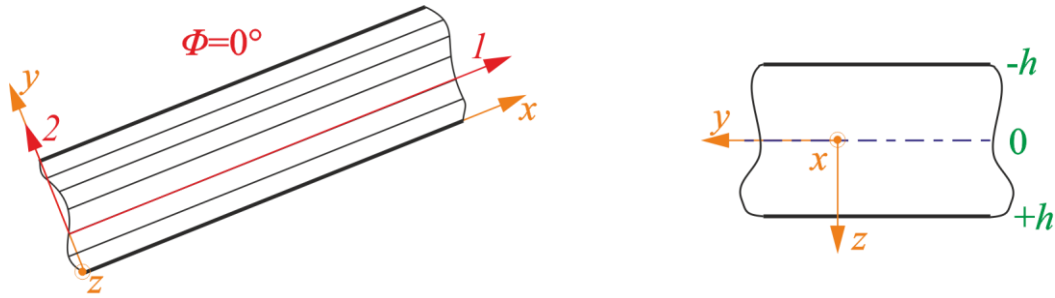
$$\mathbf{T}_\sigma = \mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Prema tome, za promatrani slučaj postavljenih slojeva, reducirana matrica elastičnosti u globalnom koordinatnom sustavu jednaka je reduciranoj matrici elastičnosti u sustavu glavnih materijalnih osi:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_6 \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Uzimajući u obzir koordinatni sustav sa Slike 4.4. desno, matrica savojne krutosti za cijeli laminat je:

$$\mathbf{D} = \frac{2h^3}{3} \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_6 \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$



Slika 4.4. koordinatni sustavi (lijevo) i presjek laminata (desno)

Uvrštavanjem zadanih podataka iz Tablice 4.2. i vrijednosti za komponente matrice savojne krutosti iz izraza (4.49) u izraz za progib (4.36) i slijedi:

$$w(x, y) = 0,001664 \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(j \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right)}{jk \left[ 0,000204 j^4 + 0,000211 j^2 k^2 + 0,000204 k^4 \right]} \quad (4.50)$$

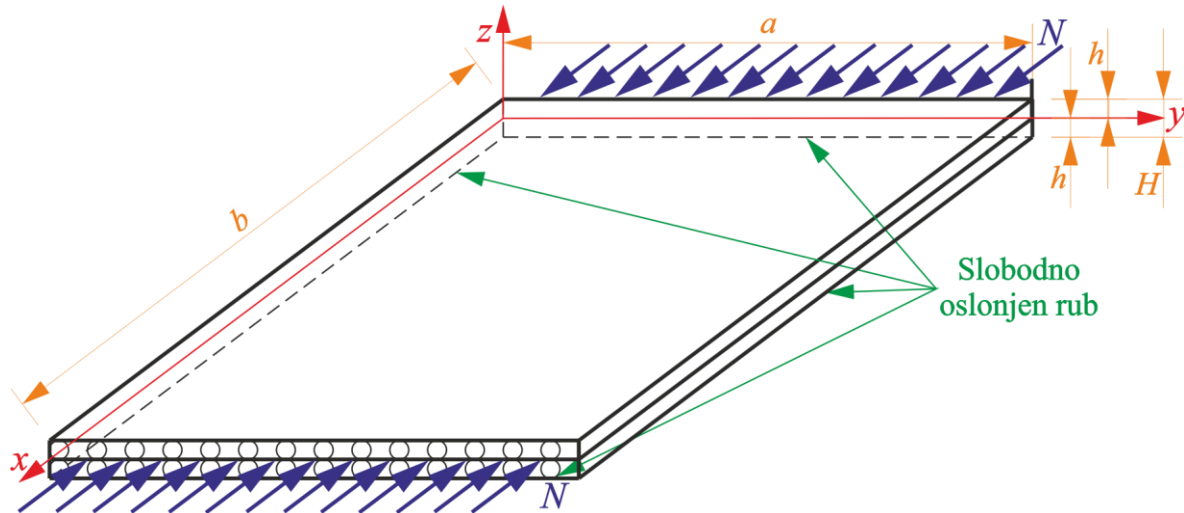
Izraz (4.50) ovisi još o parametrima  $(j, k)$ . Kako bi se osigurala odgovarajuća točnost rješenja uzeta su prva četiri člana za  $(j, k)$ , tj. 1, 3, 5 i 7. Zbrajanjem svih dobivenih članova slijedi konačne vrijednosti za progib laminata u točki A:

$$w = -2,648 \text{ mm} . \quad (4.51)$$

Deriviranjem izraza (4.36) u skladu s izrazom (4.37), te uvrštavanjem podataka iz Tablice 4.2. i uzimanjem prva četiri člana za  $(j, k)$  na isti način kao što se uzelo za progib, dobiva se vrijednost normalnog naprezanja u smjeru osi  $x$  u točki B za laminat:

$$\sigma_x = 86,847 \text{ N/mm}^2 . \quad (4.52)$$

#### 4.1.4. Kompozitna ploča opterećena na izvijanje



Slika 4.5. Pravokutna kompozitna ploča slobodno oslonjena na vanjskom rubu opterećena na izvijanje

Diferencijalna jednadžba izvijanja laminata prema [10], [11] i [12] glasi:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -N_{kr} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.53)$$

Za laminat, tj. pravokutnu ploču, slobodno oslonjenu po svim rubovima (Slika 4.5.), progib se prikazuje prema izrazu (4.28), ali će zbog preglednosti biti ovdje ponovno napisan:

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} w^{jk} \sin\left(j\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(k\pi \frac{y}{b}\right). \quad (4.54)$$

Uvrštavanjem izraza (4.54) u (4.53) slijedi izraz za izračunavanje kritične sile izvijanja za simetrični laminat:

$$N_{kr} = \pi^2 \left[ D_{11} \left(\frac{j}{a}\right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{k}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{k}{b}\right)^4 \left(\frac{a}{j}\right)^2 \right]. \quad (4.55)$$

Iz izraza (4.55) moguće je zaključiti da će se najniža vrijednost za kritičnu silu izvijanja dobiti kada su  $j, k$  jednaki jedinici. U tom slučaju, izraz za najnižu kritičnu silu izvijanja je:

$$N_{kr} = \pi^2 \left[ D_{11} \left(\frac{1}{a}\right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{1}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{1}{b}\right)^4 \left(\frac{a}{1}\right)^2 \right]. \quad (4.56)$$

Uvrštavanjem podataka iz Tablice 4.2. u izraz (4.56) dobiva se vrijednost za najnižu kritičnu silu izvijanja simetričnog laminata:

$$N_{kr} = 61,038 \text{ N/mm}. \quad (4.57)$$

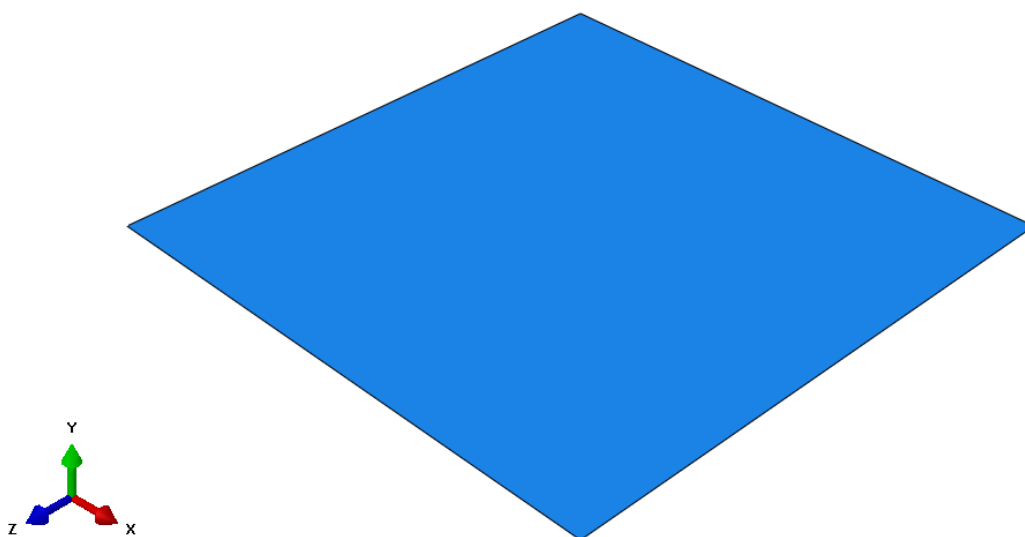
## 4.2. Proračunski modeli

Verifikacija korištenih konačnih elemenata bit će provedena u više koraka. Najprije će za izotropnu ploču opterećenu na savijanje biti praćena konvergencija progiba u točki A i normalnog naprezanja u smjeru  $x$ -osi u točki B. Za tu analizu ploča će najprije biti diskretizirana ljuskastim konačnim elementima za analizu tankih ljosaka, a zatim i s trodimenzijskim konačnim elementima. Zatim će se još za izotropnu ploču diskretiziranu ljuskastim elementima pratiti konvergencija najniže kritične sile izvijanja. Na kraju će se još za izotropnu ploču usporediti razlika u dobivenim rješenjima za različite debljine ploče kada su one diskretizirane s konačnim elementima za tanke i debele ljuske.

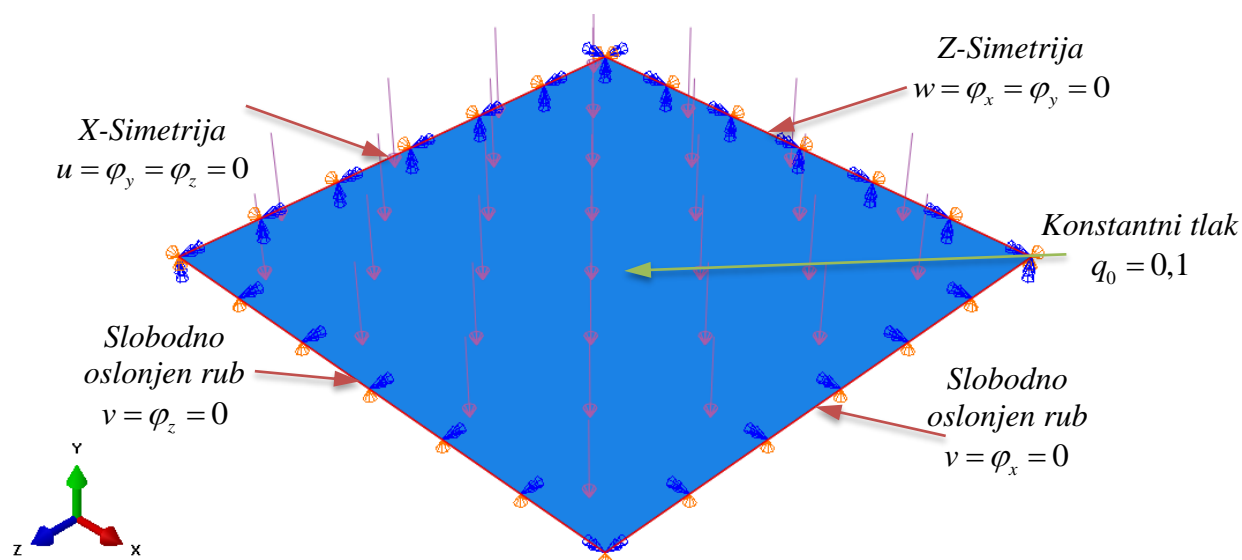
Kod analize savijanja i izvijanja kompozitne ploče koristit će se samo ljuskasti konačni elementi budući da nije moguće na jednostavan način opisivati raspodjelu slojeva u kompozitnom materijalu s trodimenzijskim konačnim elementima. Kako su proračunski modeli u Abaqusu za izotropnu i kompozitnu ploču gotovo jednaki (jedino se razlikuju u svojstvima materijala) modeliranja za svaku analizu biti će prikazano samo jednom.

### 4.2.1. Numerički model za analizu savijanja ploče diskretizirane ljuskastim konačnim elementima

Kako je proračunski model sa Slike 4.1. i Slike 4.3. dvostruko simetričan, korištena je samo četvrtina modela u svrhu štednje računalnih resursa i mogućnosti dobivanja gušće mreže. Stvoren je model prema Slici 4.6. te su mu dodana materijalna svojstva prema Tablici 4.1. za slučaj izotropne ploče, te materijalna svojstva prema Tablici 4.2. za slučaj kompozitne ploče. Rubni uvjeti sila i pomaka prikazani su na Slici 4.7.

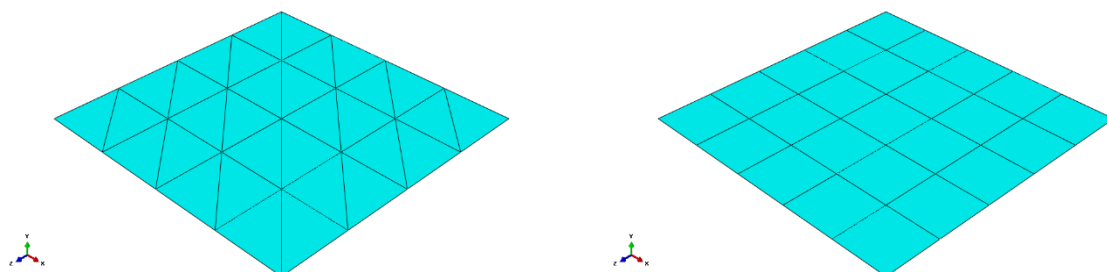


Slika 4.6. Model ploče korišten za analizu savijanja diskretizirane ljuskastim KE



**Slika 4.7. Rubni uvjeti pomaka i sila na ploči korištenoj za analizu savijanja ploče diskretizirane ljuskastim KE**

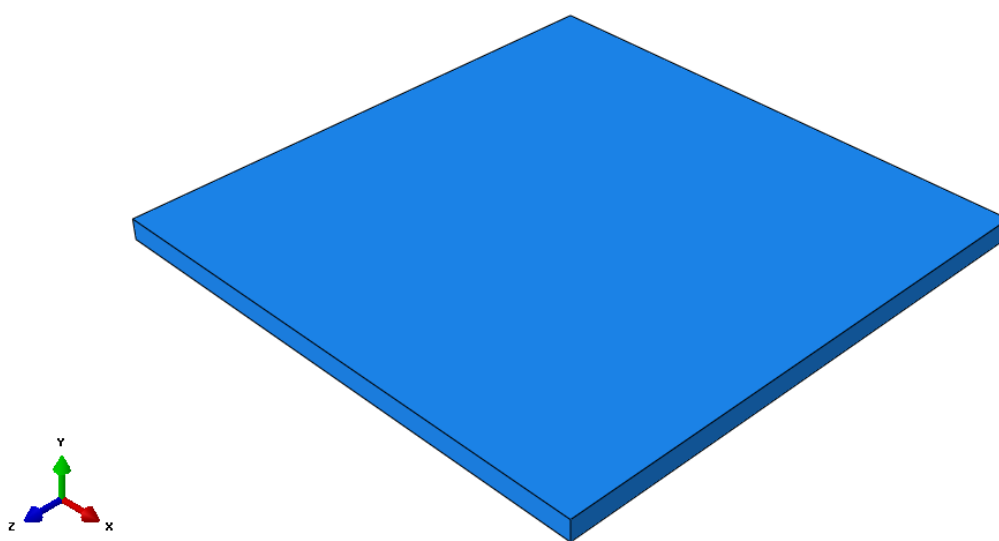
U svrhu praćenja konvergencije ploča je diskretizirana različitim brojem trokutnih i četverokutnih konačnih elemenata prvog i drugog reda. U svim analizama korištena je strukturirana mreža, kako bi se dobili što bolji rezultati i izbjegla iskrivljenost elemenata. Primjer diskretizirane ploče trokutnim i četverokutnim konačnim elementima prikazan je na Slici 4.8.



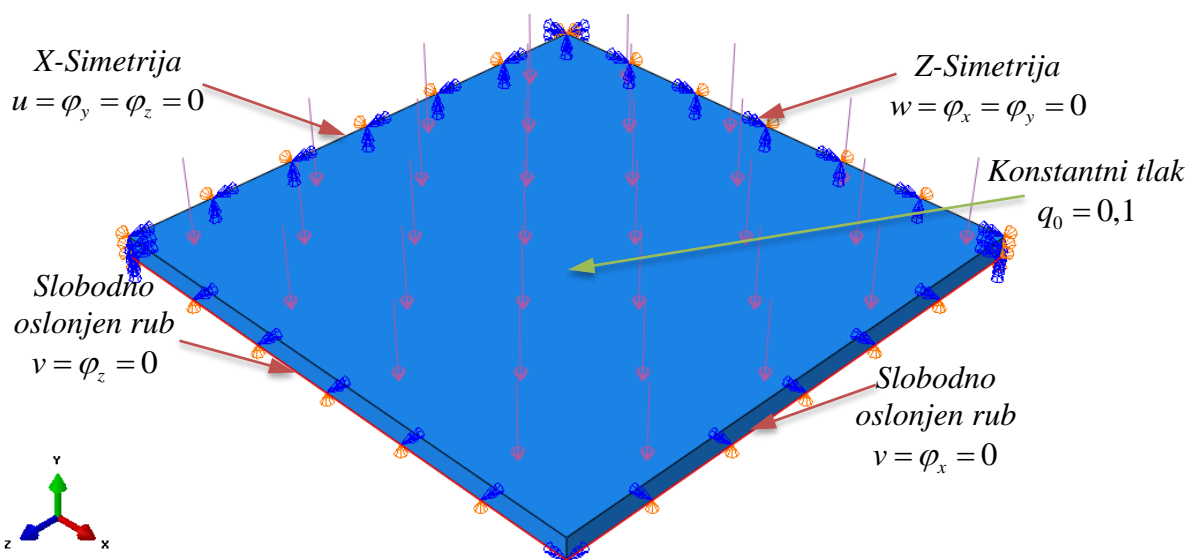
**Slika 4.8. Primjer diskretizirane ploče trokutnim (lijevo) i četverokutnim (desno) KE za analizu savijanja**

#### 4.2.2. Numerički model za analizu savijanja ploče diskretizirane trodimenzijskim konačnim elementima

Budući da će u radu biti potrebno provjeriti koncentracije naprezanja koja se javljaju u modelu koristit će se trodimenzijski konačni elementi iz razloga što ljuskasti konačni elementi ne mogu dobro uhvatiti te koncentracije. Kao kod analize s ljuskastim konačnim elementima, tako i ovdje kod analize trodimenzijskim konačnim elementima, koristit će se samo četvrtina modela u svrhu štednje računalnih resursa i mogućnosti dobivanja gušće mreže. Stvoren je model prema Slici 4.9. te su mu dodana materijalna svojstva prema Tablici 4.1. za slučaj izotropne ploče, te materijalna svojstva prema Tablici 4.2. za slučaj kompozitne ploče. Rubni uvjeti sila i pomaka prikazani su na Slici 4.10.

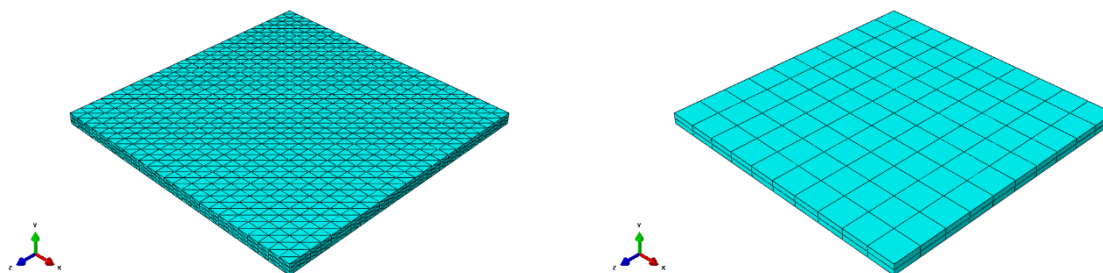


Slika 4.9. Model ploče korišten za analizu savijanja diskretizirane trodimenzijskim KE



Slika 4.10. Rubni uvjeti pomaka i sila na ploči korištenoj za analizu savijanja ploče diskretizirane trodimenzijskim KE

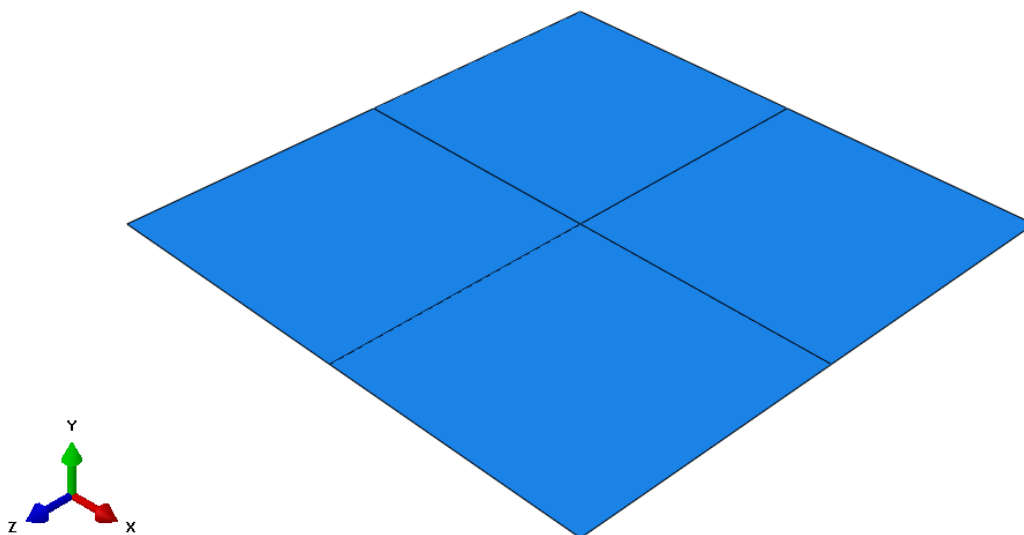
U svrhu praćenja konvergencije ploča je diskretizirana različitim brojem tetraedarskih i heksaedarskih konačnih elemenata prvog i drugog reda. U svim analizama korištena je strukturirana mreža, kako bi se dobili što bolji rezultati i izbjegla iskrivljenost elemenata. Primjer diskretizirane ploče tetraedarskim i heksaedarskim konačnim elementima prikazan je na Slici 4.11.



**Slika 4.11. Primjer diskretizirane ploče tetraedarskim (lijevo) i heksaedarskim (desno) KE za analizu savijanja**

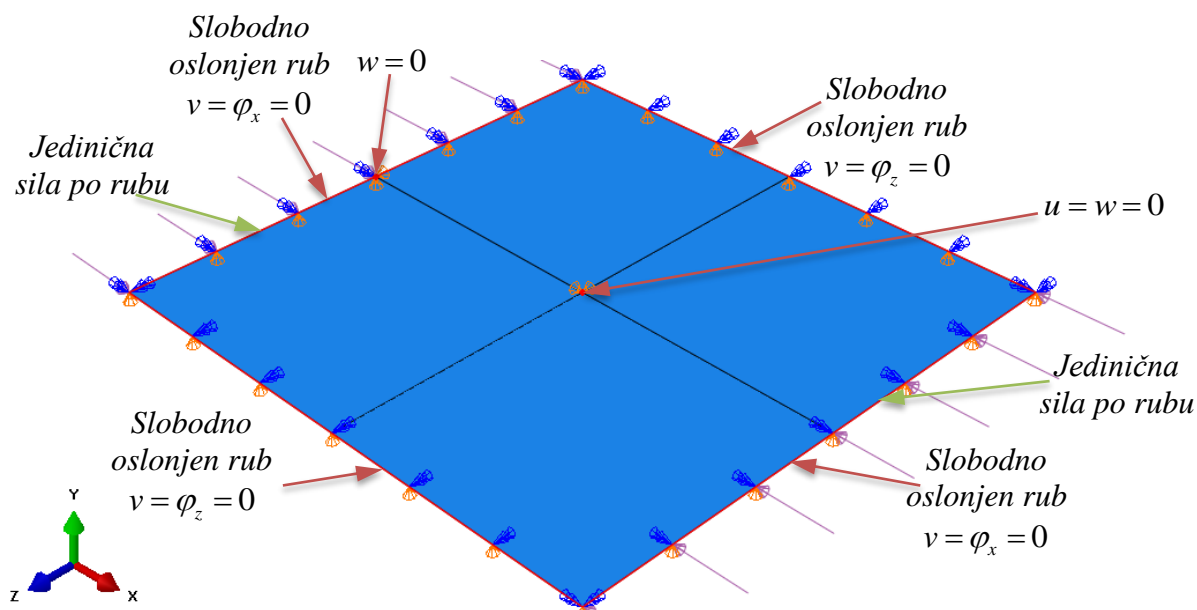
#### 4.2.3. Numerički model za analizu izvijanja ploče

Kod izvijanja ploče modelirat će se cijela geometrija jer općenito govoreći forme gubitka stabilnosti nisu simetrične. Stvoren je model prema Slici 4.12. te su mu dodana materijalna svojstva prema Tablici 4.1. za slučaj izotropne ploče, te materijalna svojstva prema Tablici 4.2. za slučaj kompozitne ploče. Rubni uvjeti sila i pomaka prikazani su na Slici 4.13.



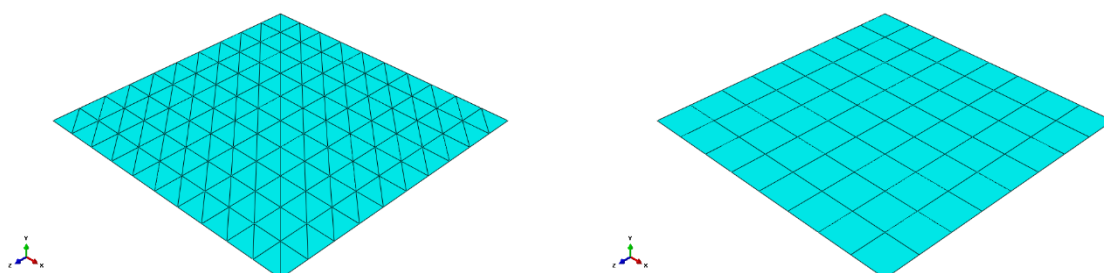
**Slika 4.12. Model ploče korišten za analizu izvijanja ploče**





Slika 4.13. Rubni uvjeti pomaka i sila na ploči korištenoj za analizu izvijanja

U svrhu praćenja konvergencije ploča je diskretizirana različitim brojem trokutnih i četverokutnih konačnih elemenata prvog i drugog reda. U svim analizama korištena je strukturirana mreža, kako bi se dobili što bolji rezultati i izbjegla iskrivljenost elemenata. Primjer diskretizirane ploče trokutnim i četverokutnim elementima prikazan je na Slici 4.14.



Slika 4.14. Primjer diskretizirane ploče trokutnim (lijevo) i četverokutnim (desno) KE za analizu izvijanja

### 4.3. Usporedba rezultata dobivenih za izotropnu ploču

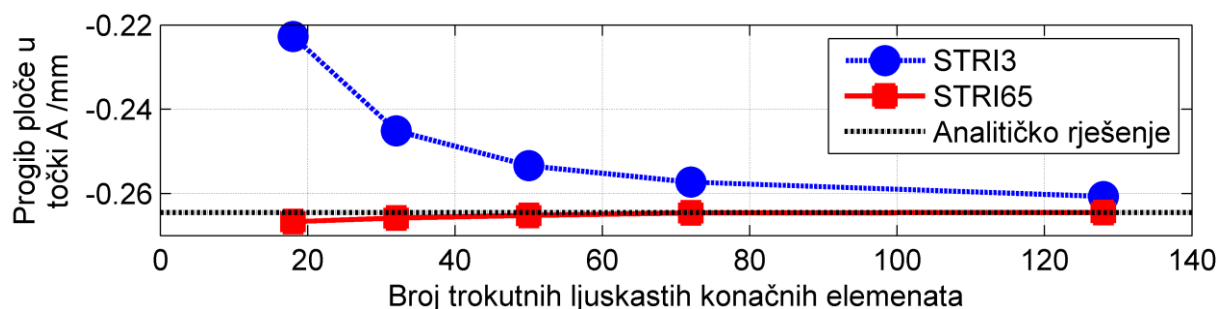
Kao što je napomenuto prije, verifikacija korištenih konačnih elemenata bit će za izotropnu ploču provedena za slučaj kada je ona opterećena na savijanje i na izvijanje. Najprije će biti dana analiza za ljuskaste konačne elemente, te će biti praćena konvergencija progiba u točki A, konvergencija normalnog naprezanja u smjeru  $x$ -osi u točki B i konvergencija kritične sile izvijanja. Zatim će se ista analiza konvergencije progiba i naprezanja provesti za slučaj diskretizacije ploče trodimenzijskim konačnim elementima, dok će se na kraju još za izotropnu ploču usporediti razlika u dobivenim rješenjima za progib i naprezanje za različite slučajeve debljine ploče kada su one diskretizirane s konačnim elementima za tanke i debele ljuske.

#### 4.3.1. Izotropna ploča diskretizirana ljuskastim konačnim elementima za analizu tankih ploča

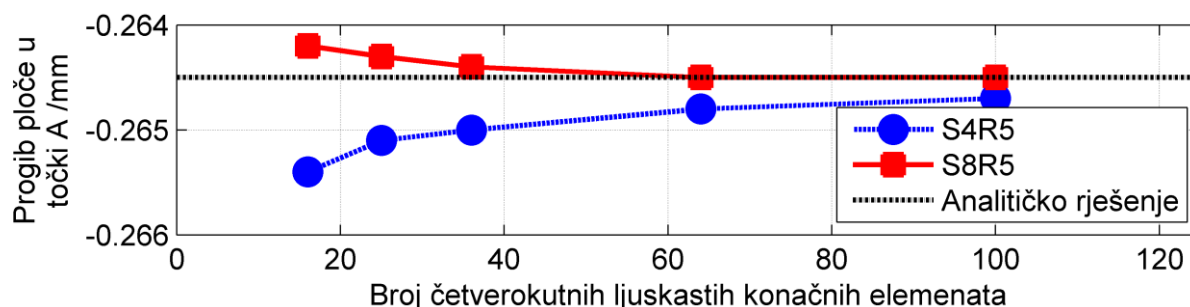
Izotropna ploča diskretizirana je različitim brojem trokutnih i četverokutnih ljuskastih konačnih elemenata za analizu tankih ploča te su u nastavku najprije prikazani tablično rezultati za progib ploče u točki A (Tablica 4.3.), a zatim je u obliku dijagrama prikazana konvergencija rezultata prema analitičkom rješenju (Slika 4.15. i 4.16.).

**Tablica 4.3. Progib izotropne ploče u točki A diskretizirane različitim ljuskastim KE i relativna greška u odnosu na analitičko rješenje**

<i>Trokutni konačni elementi</i>				
Broj elemenata	STRI3		STRI65	
	Progib /mm	Greška /%	Progib /mm	Greška /%
18	-0,2227	15,80	-0,2667	0,83
32	-0,2451	7,34	-0,2658	0,49
50	-0,2534	4,20	-0,2652	0,26
72	-0,2573	2,72	-0,2646	0,04
128	-0,2607	1,44	-0,2645	0,00
<i>Četverokutni konačni elementi</i>				
Broj elemenata	S4R5		S8R5	
	Progib /mm	Greška /%	Progib /mm	Greška /%
16	-0,2654	0,34	-0,2642	0,11
25	-0,2651	0,23	-0,2643	0,08
36	-0,2650	0,19	-0,2644	0,04
64	-0,2648	0,11	-0,2645	0,00
100	-0,2647	0,08	-0,2645	0,00



Slika 4.15. Dijagram konvergencije progiba izotropne ploče u točki A diskretizirane trokutnim ljuskastim KE

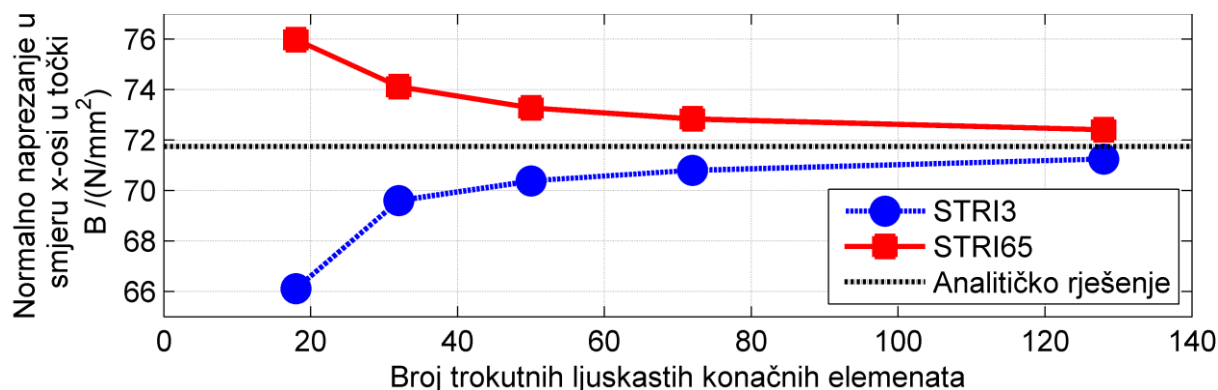


Slika 4.16. Dijagram konvergencije progiba izotropne ploče u točki A diskretizirane četverokutnim ljuskastim KE

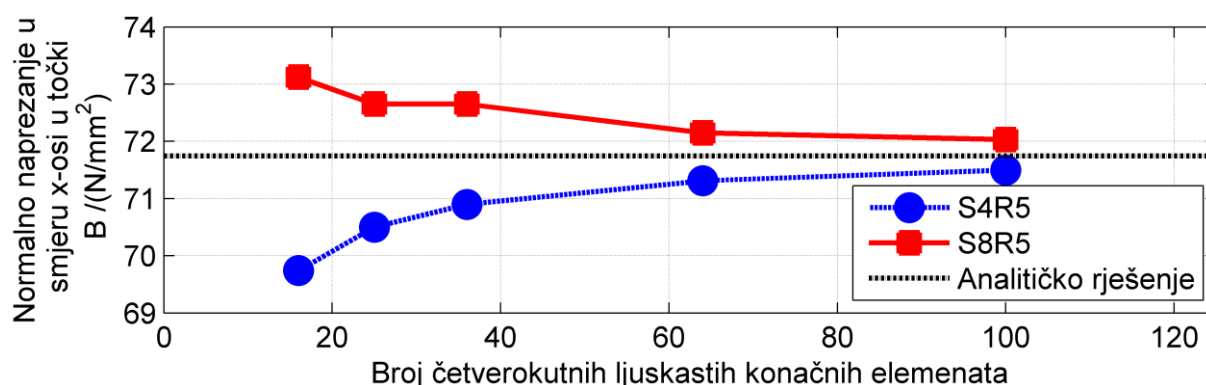
Nakon progiba praćena je konvergencija normalnog naprezanja u smjeru  $x$ -osi te su rezultati za različitu vrstu i različiti broj konačnih elemenata prikazani u Tablici 4.4., a zatim u obliku dijagrama na Slikama 4.17. i 4.18.

Tablica 4.4. Normalno naprezanje u smjeru  $x$ -osi izotropne ploče u točki B diskretizirane različitim ljuskastim KE i relativna greška u odnosu na analitičko rješenje

<i>Trokutni konačni elementi</i>				
Broj elemenata	STRI3		STRI65	
	Naprezanje /(N/mm <sup>2</sup> )	Greška /%	Naprezanje /(N/mm <sup>2</sup> )	Greška /%
18	66,11	7,60	75,98	6,20
32	69,60	2,72	74,12	3,60
50	70,38	1,63	73,28	2,43
72	70,8	1,04	72,84	1,81
128	70,95	0,83	72,41	1,21
<i>Četverokutni konačni elementi</i>				
Broj elemenata	S4R5		S8R5	
	Naprezanje /(N/mm <sup>2</sup> )	Greška /%	Naprezanje /(N/mm <sup>2</sup> )	Greška /%
16	69,75	2,51	73,12	2,20
25	70,50	1,46	72,65	1,54
36	70,90	0,90	72,65	1,54
64	71,11	0,61	72,15	0,85
100	71,20	0,48	71,60	0,08



Slika 4.17. Dijagram konvergencije normalnog naprezanja u smjeru  $x$ -osi u točki B izotropne ploče diskretizirane trokutnim ljuskastim KE



Slika 4.18. Dijagram konvergencije normalnog naprezanja u smjeru  $x$ -osi u točki B izotropne ploče diskretizirane četverokutnim ljuskastim KE

Na kraju je još za ljuskaste konačne elemente praćena konvergencija najniže kritične sile izvijanja. Dobiveni rezultati, zajedno s relativnom greškom u odnosu na analitičko rješenje za različitu vrstu i različite brojeve konačnih elemenata prikazani su u Tablici 4.5., dok su dijagrami konvergencije prikazani na Slikama 4.19. i 4.20.

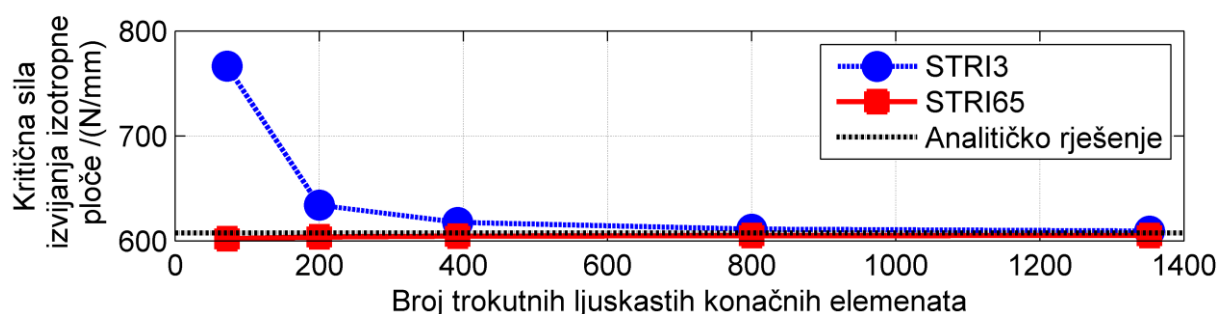
Iz svih dobivenih rezultata kod analize savijanja izotropne ploče može se zaključiti da ljuskasti konačni elementi daju dobre rezultate povećavanjem broja elemenata. Najbolji su se pokazali četverokutni ljuskasti konačni elementi drugog reda koji već kod malog broja elemenata daju rezultate koji su zanemarive razlike u odnosu na analitička rješenja. Iz tog će se razloga četverokutni ljuskasti konačni elementi drugog reda najvećim dijelom koristiti u ovome radu.

**Tablica 4.5. Kritična sila izvijanja izotropne ploče diskretizirane različitim ljuskastim KE i relativna greška u odnosu na analitičko rješenje**

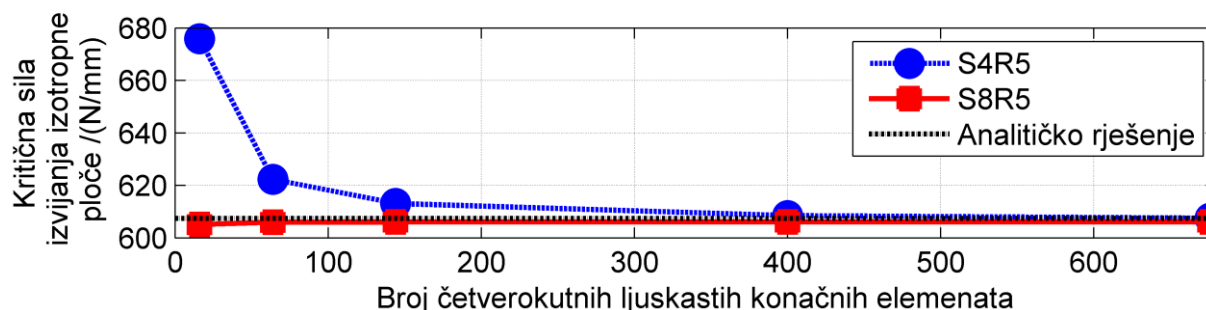
<i>Trokutni konačni elementi</i>				
Broj elemenata	STRI3		STRI65	
	Sila /(N/mm)	Greška /%	Sila /(N/mm)	Greška /%
72	766,60	26,22	601,92	0,90
200	633,96	4,40	603,75	0,60
392	617,66	1,70	604,46	0,48
800	611,24	0,64	604,94	0,40
1352	609,20	0,30	605,19	0,36

<i>Četverokutni konačni elementi</i>				
Broj elemenata	S4R5		S8R5	
	Sila /(N/mm)	Greška /%	Sila /(N/mm)	Greška /%
16	675,90	11,29	605,13	0,37
62	622,27	2,46	605,99	0,23
144	613,14	0,95	606,24	0,18
400	608,55	0,20	606,75	0,10
676	607,50	0,02	607,20	0,02



**Slika 4.19. Dijagram konvergencije najniže kritične sile izvijanja izotropne ploče diskretizirane trokutnim ljuskastim KE**



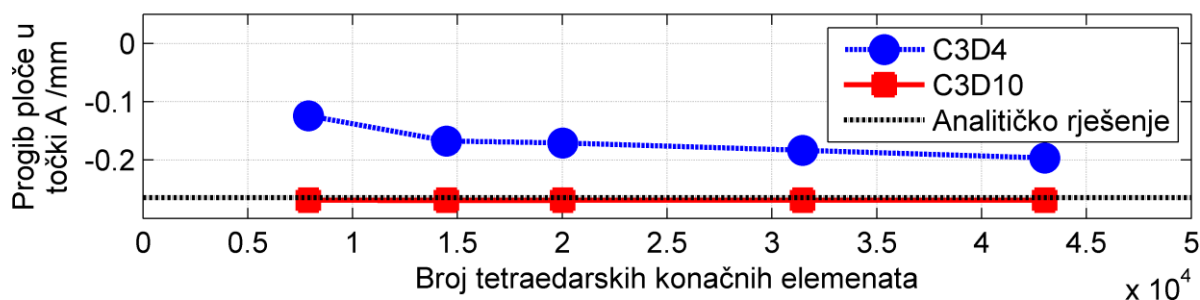
**Slika 4.20. Dijagram konvergencije najniže kritične sile izvijanja izotropne ploče diskretizirane četverokutnim ljuskastim KE**

#### 4.3.2. Izotropna ploča diskretizirana trodimenzijskim konačnim elementima

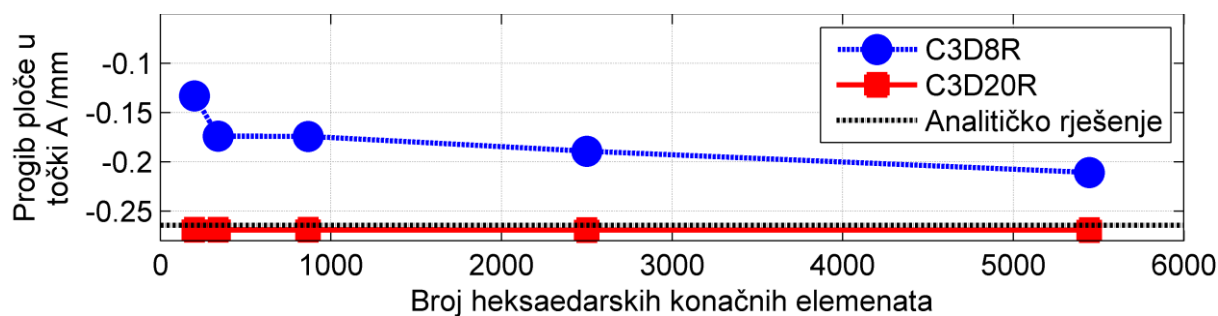
Ploča je diskretizirana različitim brojem tetraedarskih i heksaedarskih konačnih elemenata prvog i drugog reda. Kao i kod diskretizacije ljuskastim konačnim elementima, tako se i ovdje najprije pratila konvergencija progiba u točki A. Rezultati za progibe zajedno s relativnom greškom u odnosu na analitičko rješenje prikazano je u Tablici 4.6., dok je na Slikama 4.21. i 4.22. prikazana konvergencija progiba u točki A za različiti broj konačnih elemenata

**Tablica 4.6. Progib izotropne ploče u točki A diskretizirane različitim trodimenzijskim KE i relativna greška u odnosu na analitičko rješenje**

<i>Tetraedarski konačni elementi</i>				
Broj elemenata	C3D4		C3D10	
	Progib /mm	Greška /%	Progib /mm	Greška /%
7 895	-0,1240	53,12	-0,2689	1,66
14 840	-0,1673	36,75	-0,2691	1,74
20 013	-0,1706	35,50	-0,2692	1,78
31 460	-0,1833	30,70	-0,2692	1,78
43 013	-0,1964	25,75	-0,2692	1,78
<i>Heksaedarski konačni elementi</i>				
Broj elemenata	C3D8R		C3D20R	
	Progib /mm	Greška /%	Progib /mm	Greška /%
200	-0,1331	49,68	-0,2691	1,74
338	-0,1740	34,22	-0,2691	1,74
867	-0,1743	34,10	-0,2692	1,78
2 500	-0,1893	28,43	-0,2693	1,82
5 445	-0,2108	20,30	-0,2693	1,82



**Slika 4.21. Dijagram konvergencije progiba izotropne ploče u točki A diskretizirane tetraedarskim KE**

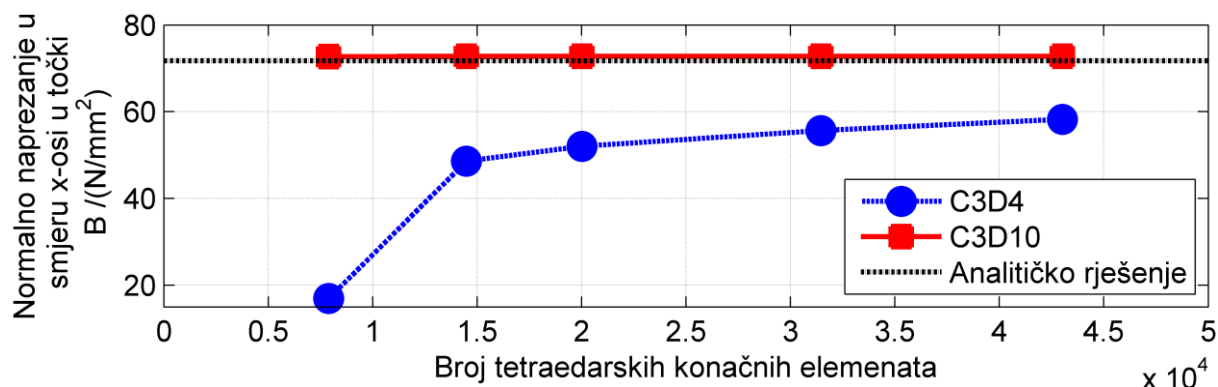


**Slika 4.22.** Dijagram konvergencije progiba izotropne ploče u točki A diskretizirane heksaedarskim KE

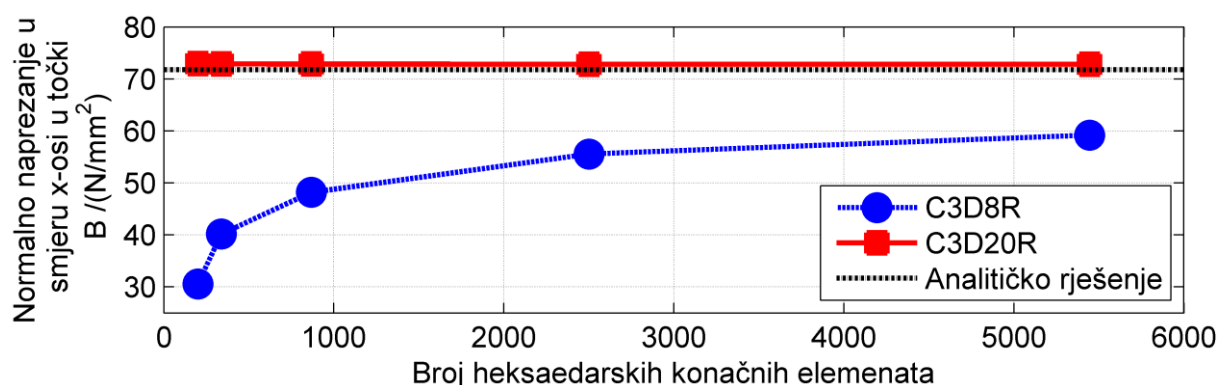
Nakon progiba praćena je konvergencija normalnog naprezanja u smjeru  $x$ -osi te su rezultati, zajedno s relativnom greškom u odnosu na analitičko rješenje, za različitu vrstu i različiti broj konačnih elemenata prikazani u Tablici 4.7., a zatim u obliku dijagrama na Slikama 4.23. i 4.24.

**Tablica 4.7.** Normalno naprezanje u smjeru  $x$ -osi izotropne ploče u točki B diskretizirane različitim trodimenzijskim KE i relativna greška u odnosu na analitičko rješenje

<i>Tetraedarski konačni elementi</i>				
Broj elemenata	C3D4		C3D10	
	Naprezanje /(N/mm <sup>2</sup> )	Greška /%	Naprezanje /(N/mm <sup>2</sup> )	Greška /%
7 895	16,93	76,34	72,72	1,64
14 840	48,59	32,08	72,77	1,71
20 013	52,04	27,26	72,78	1,73
31 460	55,66	22,20	72,79	1,74
43 013	58,27	18,55	72,79	1,74
<i>Heksaedarski konačni elementi</i>				
Broj elemenata	C3D8R		C3D20R	
	Naprezanje /(N/mm <sup>2</sup> )	Greška /%	Naprezanje /(N/mm <sup>2</sup> )	Greška /%
200	30,60	57,23	72,95	1,96
338	40,19	43,83	72,88	1,87
867	48,20	32,63	72,85	1,82
2 500	55,56	22,34	72,82	1,82
5 445	59,22	17,22	72,82	1,78



Slika 4.23. Dijagram konvergencije normalnog naprezanja u smjeru  $x$ -osi u točki B izotropne ploče diskretizirane tetraedarskim KE



Slika 4.24. Dijagram konvergencije normalnog naprezanja u smjeru  $x$ -osi u točki B izotropne ploče diskretizirane heksaedarskim KE

Za trodimenzijske elemente uočljivo je da konvergiraju tek kod velikog broja konačnih elemenata. Iz tog se razloga oni ne koriste često u analizama tankih ploča i tu je vidljiva velika prednost ljuskastih konačnih elemenata. Povećavanjem broja konačnih elemenata, pogotovo elemenata drugog reda koji već kod malog broja elemenata daju dobra rješenja, rješenje se približava točnom. Iz toga razloga će se tetraedarski i heksaedarski elementi drugog reda koristiti i kod analiza koncentracija naprezanja na kobilici prilikom podmodeliranja.

Također je uočljivo da trodimenzijski elementi daju rezultate za naprezanje i progibe malo veće od one dobivene analitičkim putem. Razlog tome je taj se u analizi tankih ploča uzima u obzir ravninsko stanje naprezanja, a trodimenzijski elementi uzimaju u obzir sve komponente naprezanja. Budući da su dobivene razlike za inženjerske potrebe zanemarive može se zaključiti da će se pravilnim opisivanjem geometrije i rubnih uvjeta dobiti dobri rezultati.



### 4.3.3. Usporedba ljuskastih konačnih elemenata za tanke i debele ploče kod analize savijanja izotropne ploče

U radu će se koristiti tehnika podmodeliranja kako bi se mogle analizirati koncentracije naprezanja oko mjesta naglih promjena geometrije. To će se provesti na način da će se najprije napraviti analiza globalnog modela diskretiziranog s ljuskastim konačnim elementima, a podmodel će biti diskretiziran trodimenzijskim elementima. Tu se javlja problem nekompatibilnosti ljuskastih konačnih elemenata koji su izvedeni za tanke ploče i trodimenzijskih konačnih elemenata na mjestu gdje će biti potrebno definirati granice podmodela. Iz tog će se razloga koristiti ljuskasti konačni elementi za debele ploče, tj. elementi koji imaju 6 stupnja slobode po čvoru.

Kako četverokutni konačni elementi daju točnije rezultate od trokutnih, ovdje će biti napravljena usporedba između četverokutnih konačnih elemenata prvog i drugog reda za analizu tankih i debelih ploča. Budući da je u poglavlju 4.3.1. pokazano da se dovoljno velikim brojem konačnih elemenata može jako približiti analitičkom rješenju ovdje će za mrežu od 200 četverokutnih konačnih elemenata biti napravljena usporedba između rezultata koji se dobivaju konačnim elementima za tanke i debele ploče. Analizirat će se ploča istih dimenzija kao što je na Slici 4.1., ali će se mijenjati debljina ploče. Debljine će iznositi 0.1, 1, 10 i 20 mm, dok će opterećenje za debljinu od 0.1 mm iznositi 0.001 MPa, a za ostale debljine 0.1 MPa kako bi se osigurala realnost rezultata. Kao i u prijašnjim poglavljima, pratit će se dobivena vrijednost za progib u točki A, te normalno naprezanje u smjeru  $x$ -osi u točki B. Nakon provedene analize dobiveni su rezultati sukladno Tablici 4.8.

**Tablica 4.8. Usporedba progiba ( $w$  / mm) u točki A i normalnog naprezanja u smjeru  $x$ -osi ( $\sigma_x$  / Nmm<sup>-2</sup>) u točki B za različite debljine ploče dobivenih različitim konačnim elementima**

Vrste elementa	$H = 0,1$ mm		$H = 1$ mm		$H = 10$ mm		$H = 20$ mm	
	$w$	$\sigma_x$	$w$	$\sigma_x$	$w$	$\sigma_x$	$w$	$\sigma_x$
S4R	-2,113	28,599	-2,115	285,986	-0,0022	2,860	-0,0003	0,715
S4R5	-2,114	28,600	-2,115	286,006	-0,0022	2,860	-0,0003	0,715
S8R	-2,112	28,813	-2,114	288,134	-0,0022	2,881	-0,0003	0,720
S8R5	-2,112	28,813	-2,114	288,129	-0,0022	2,881	-0,0003	0,720

Iz Tablice 4.8. može se vidjeti da su dobiveni gotovo identični rezultati za sve vrste konačnih elemenata za pojedine debljine ploče. Prema tome, može se zaključiti da se zamjenom elemenata za tanke ploče s elementima za debele ploče neće gubiti na točnosti u rješenju zbog potrebe podmodeliranja.

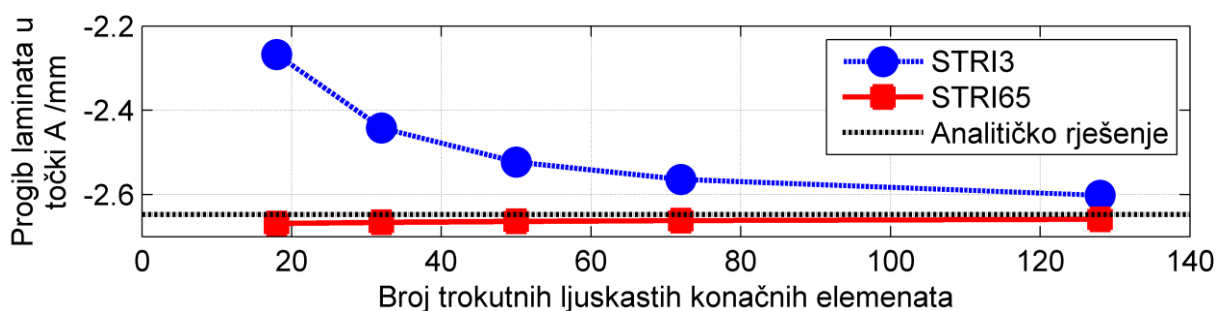
#### 4.4. Usporedba rezultata dobivenih za laminat

Verifikacija korištenih konačnih elemenata za kompozitnu ploču bit će provedena za slučaj kada je ona opterećena na savijanje i na izvijanje, jednako kao i kod izotropne ploče. Za kompozitnu ploču analiza će biti provedena samo za slučaj diskretizacije ploče ljuskastim konačnim elementima. Pratit će se konvergencija progiba u točki A, konvergencija normalnog naprezanja u smjeru x-osi u točki B te konvergencija najniže kritične sile izvijanja.

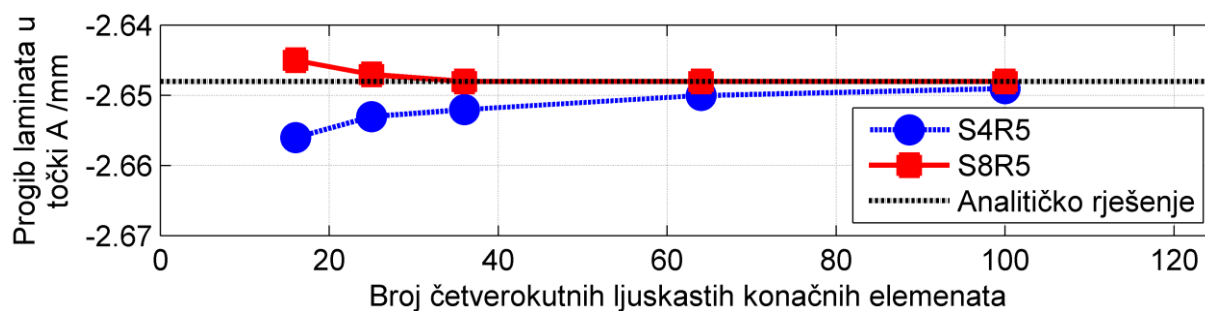
Kompozitna ploča diskretizirana je različitim brojem trokutnih i četverokutnih ljuskastih konačnih elemenata za analizu tankih ploča te su u nastavku najprije tablično prikazani rezultati za progib ploče u točki A (Tablica 4.9.), a zatim je u obliku dijagrama prikazana konvergencija rezultata prema analitičkom rješenju (Slika 4.25. i 4.26.).

**Tablica 4.9. Progib laminatae u točki A diskretiziranog različitim ljuskastim KE i relativna greška u odnosu na analitičko rješenje**

<i>Trokutni konačni elementi</i>				
Broj elemenata	STRI3		STRI65	
	Progib /mm	Greška /%	Progib /mm	Greška /%
18	-2,268	14,35	-2,669	0,79
32	-2,442	7,78	-2,666	0,68
50	-2,523	4,72	-2,664	0,60
72	-2,564	3,17	-2,662	0,53
128	-2,602	1,74	-2,659	0,42
<i>Četverokutni konačni elementi</i>				
Broj elemenata	S4R5		S8R5	
	Progib /mm	Greška /%	Progib /mm	Greška /%
16	-2,656	0,30	-2,645	0,11
25	-2,653	0,19	-2,647	0,04
36	-2,652	0,15	-2,648	0,00
64	-2,650	0,08	-2,648	0,00
100	-2,649	0,04	-2,648	0,00



**Slika 4.25. Dijagram konvergencije progiba laminata u točki A diskretiziranog trokutnim ljuskastim KE**

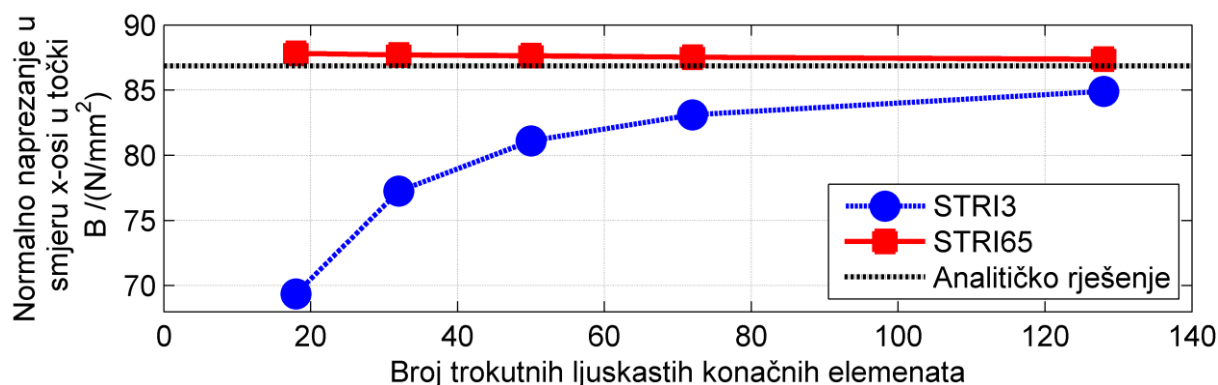


**Slika 4.26.** Dijagram konvergencije progiba laminata u točki A diskretiziranog četverokutnim ljuskastim KE

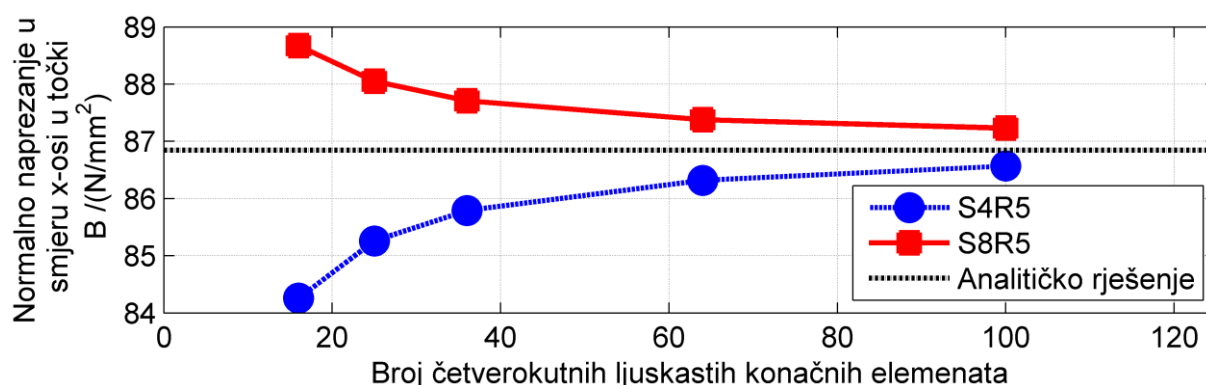
Nakon progiba praćena je konvergencija normalnog naprezanja u smjeru  $x$ -osi te su rezultati, zajedno s relativnom greškom u odnosu na analitičko rješenje, za različitu vrstu i različiti broj konačnih elemenata prikazani u Tablici 4.10., a zatim u obliku dijagrama na Slikama 4.27. i 4.28.

**Tablica 4.10.** Normalno naprezanje u smjeru  $x$ -osi laminata u točki B diskretiziranog različitim ljuskastim KE i relativna greška u odnosu na analitičko rješenje

<i>Trokutni konačni elementi</i>				
Broj elemenata	STRI3		STRI65	
	Naprezanje $/(N/mm^2)$	Greška $\%$	Naprezanje $/(N/mm^2)$	Greška $\%$
18	69,37	20,12	87,82	1,12
32	77,26	11,04	87,70	0,98
50	81,12	6,60	87,64	0,91
72	83,11	4,30	87,53	0,79
128	84,91	2,23	87,37	0,60
<i>Četverokutni konačni elementi</i>				
Broj elemenata	S4R5		S8R5	
	Naprezanje $/(N/mm^2)$	Greška $\%$	Naprezanje $/(N/mm^2)$	Greška $\%$
16	84,26	2,98	88,67	2,10
25	85,26	1,83	88,05	0,14
36	85,79	1,22	87,71	0,99
64	86,32	0,61	87,18	0,38
100	86,57	0,32	86,93	0,10



Slika 4.27. Dijagram konvergencije normalnog naprezanja u smjeru  $x$ -osi u točki B laminata diskretiziranog trokutnim ljuskastim KE



Slika 4.28. Dijagram konvergencije normalnog naprezanja u smjeru  $x$ -osi u točki B laminata diskretiziranog četverokutnim ljuskastim KE

Na kraju je još za kompozitnu ploču praćena konvergencija najniže kritične sile izvijanja. Dobiveni rezultati, zajedno s relativnom greškom u odnosu na analitičko rješenje za različitu vrstu i različite brojeve konačnih elemenata prikazani su u Tablici 4.11., dok su dijagrami konvergencije prikazani na Slikama 4.29. i 4.30.

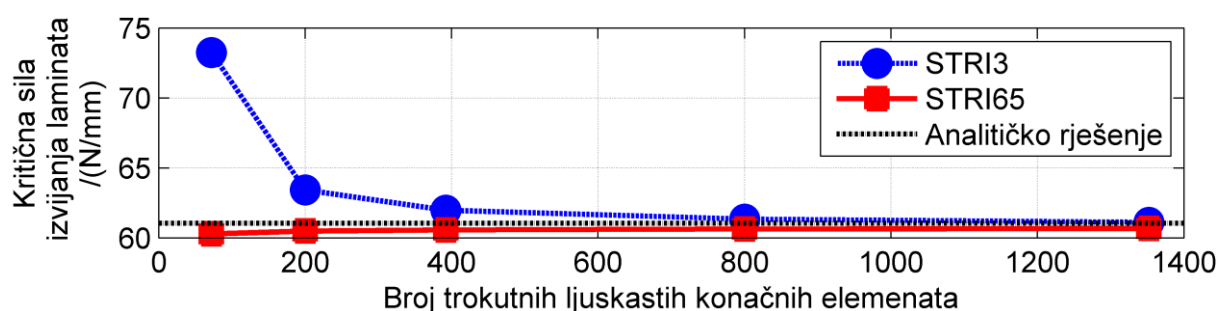
Iz svih dobivenih rezultata kod analize savijanja kompozitne ploče može se zaključiti da ljuskasti konačni elementi daju dobre rezultate povećavanjem broja elemenata. Kao i kod izotropne ploče, tako su se i ovdje najboljima pokazali četverokutni ljuskasti konačni elementi drugog reda koji već kod malog broja elemenata daju rezultate zanemarive razlike u odnosu na analitička rješenja. Iz tog će se razloga četverokutni ljuskasti konačni elementi drugog reda najvećim dijelom koristiti u ovome radu.

**Tablica 4.11. Kritična sila izvijanja laminata diskretiziranog različitim ljuskastim KE i relativna greška u odnosu na analitičko rješenje**

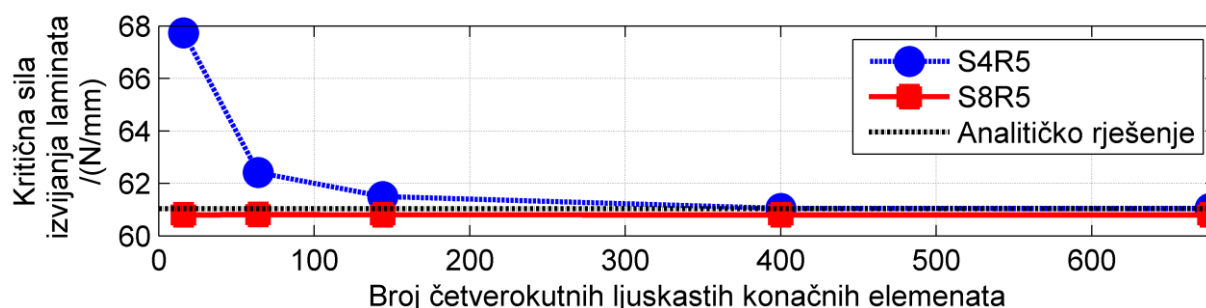
<i>Trokutni konačni elementi</i>				
Broj elemenata	STRI3		STRI65	
	Sila /(N/mm)	Greška /%	Sila /(N/mm)	Greška /%
72	73,238	19,99	60,277	1,25
200	63,442	3,94	60,484	0,91
392	61,979	1,54	60,569	0,77
800	61,346	0,51	60,834	0,33
1352	61,115	0,13	61,001	0,06

<i>Četverokutni konačni elementi</i>				
Broj elemenata	S4R5		S8R5	
	Sila /(N/mm)	Greška /%	Sila /(N/mm)	Greška /%
16	67,732	10,97	60,797	0,40
64	62,410	2,25	60,911	0,21
144	61,503	0,76	60,992	0,07
400	61,047	0,02	61,022	0,03
676	61,043	0,00	61,032	0,00



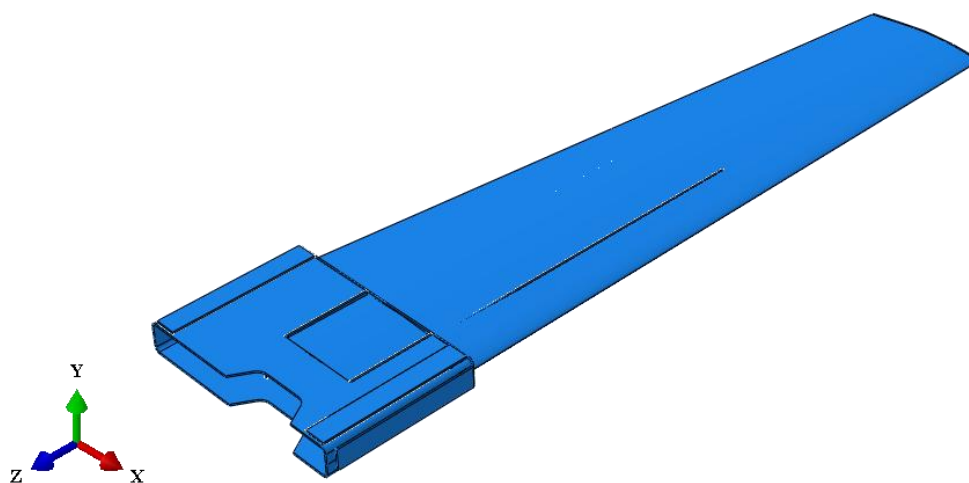
**Slika 4.29. Dijagram konvergencije kritične sile izvijanja laminata diskretiziranog trokutnim ljuskastim KE**



**Slika 4.30. Dijagram konvergencije kritične sile izvijanja laminata diskretiziranog četverokutnim ljuskastim KE**

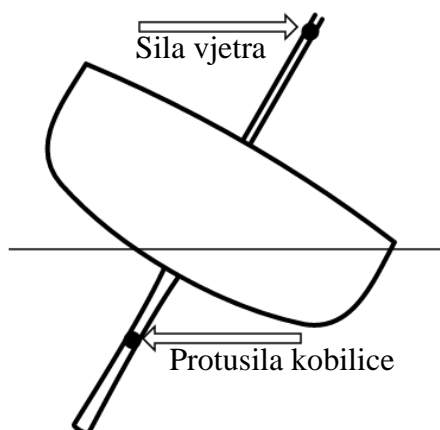
## 5. PRORAČUN ČVRSTOĆE I KONTROLA STABILNOSTI KOBILICE IZRAĐENE OD VISOKOČVRSTOG ČELIKA

Kobilica jedrilice se najčešće izrađuje od visokočvrstog čelika zbog dobrih materijalnih svojstava i manje mase koju ima u odnosu na obični konstrukcijski čelik. Kako bi se dobio uvid u ponašanje kobilice, najdetaljnije će se analizirati ponašanje samo oplata kobilice, budući da će taj dio biti najopterećeniji. Nakon što se utvrdi odziv samo oplata, dodat će se uzdužne ukrute i gornja kutija kako bi se utvrdilo gdje se javljaju najveće koncentracije naprezanja, te kako se riješiti tih koncentracija naprezanja. Slika 5.1. prikazuje trodimenzijski model kobilice jedrilice koji sadrži sve prije navedene dijelove.



Slika 5.1. Trodimenzijski model kobilice jedrilice

U radu će biti vrlo važno opisivanje načina na koji je kobilica opterećena. Kobilica je tijekom plovidbe najopterećenija zbog sile vjetra koja teži prevrnuti cijelu jedrilicu. Kobilica iz toga razloga mora svojom težinom stvarati protusilu koja će izjednačavati silu vjetra, tako da ne dođe do prevrtanja (Slika 5.2.). Iz toga razloga može se zaključiti da će glavni način opterećenja kobilice biti na savijanje uslijed protusile kobilice.

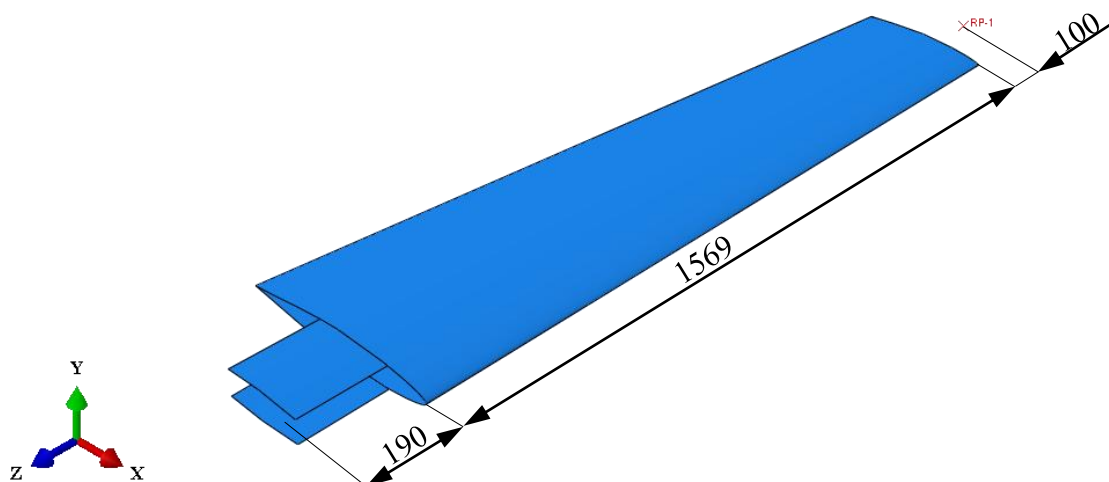


Slika 5.2. Način opterećenja kobilice tijekom naleta vjetra [1]

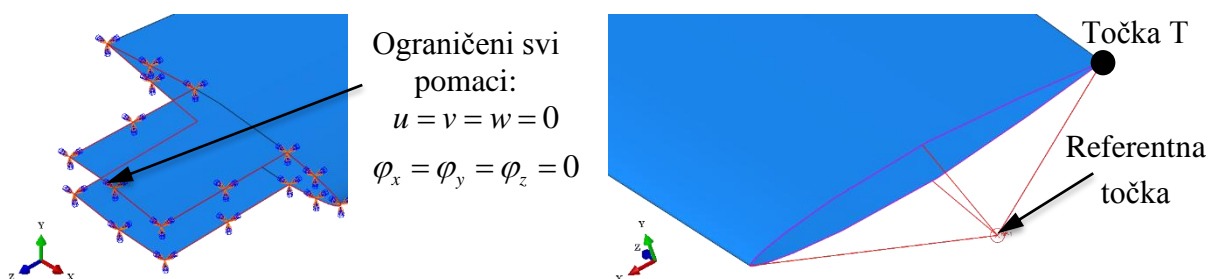
## 5.1. Analiza čvrstoće samo oplata

Kako bi se utvrdilo ponašanje kobilice uslijed djelovanja opterećenja, najprije će se ispitati odziv samo oplata kobilice. Najprije je iz trodimenzionalnog modela napravljen ljuskasti model oplata (Slika 5.3.) iz razloga što se ljuskastim elementima može brže doći do rezultata budući da imaju manje stupnjeva slobode po elementu nego trodimenzijski elementi. Oplata je također podijeljena u gornjem dijelu (odvojena su „uha“) kako bi se kasnije mogla postići strukturirana mreža konačnih elemenata. Kako bi se kasnije zadalo opterećenje na kobilicu, stvorena je referentna točka (RP-1), koja je udaljena 100 mm od dna kobilice. Razlog takvom načinu zadavanja opterećenja je što realnije opisivanje stvarnog problema. Naime, na kobilicu će se u tome području preko svornjaka vezati uteg koji će imati ulogu stvaranja protusile sili vjetra koji želi prevrnuti jedrilicu.

Rubni uvjeti pomaka zadani su na gornjem dijelu kobilice, tako da su ograničeni svi pomaci (Slika 5.4. lijevo). Referentna točka vezana je za dno oplata kobilice pomoću kinematičkih veza (*engl. kinematic coupling*) kao što je prikazano na Slici 5.4. desno. U referentnu točku je zatim zadana koncentrirana sila u smjeru globalne Y-osi.



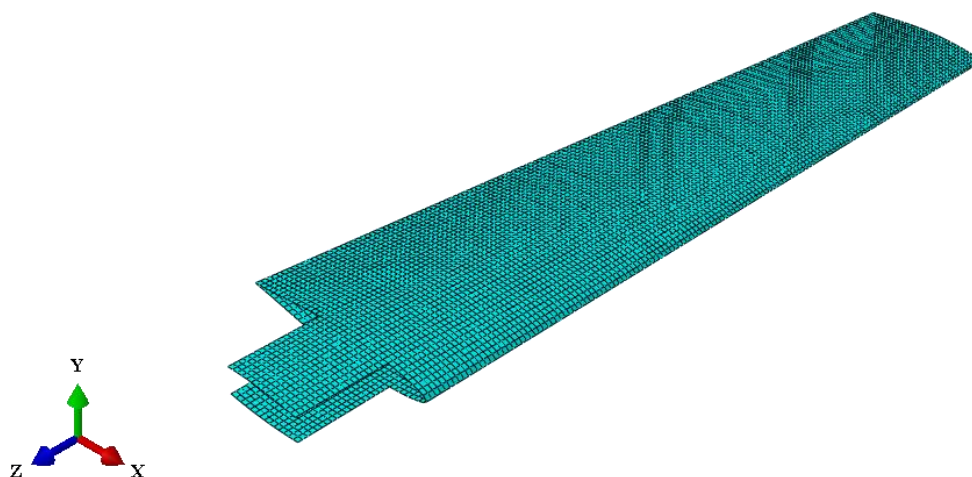
Slika 5.3. Ljuskasti model oplata kobilice



Slika 5.4. Rubni uvjeti pomaka (lijevo) i referentna točka preko koje su zadani rubni uvjeti sila (desno)



Modelu oplata kobilice dodana su materijalna svojstva opisana u odjeljku 1.3.1., te je za debljinu oplata zadana vrijednost od 4 mm. Prije analize potrebno je još bilo provesti diskretizaciju geometrije konačnim elementima. Oplata je diskretizirana s 11116 četverokutnih konačnih elemenata drugog reda (S8R) kako bi se osigurao kontinuitet pomaka duž rubova jer će se raditi podmodeliranje. Mreža diskretizirane oplata konačnim elementima prikazana je na Slici 5.5.

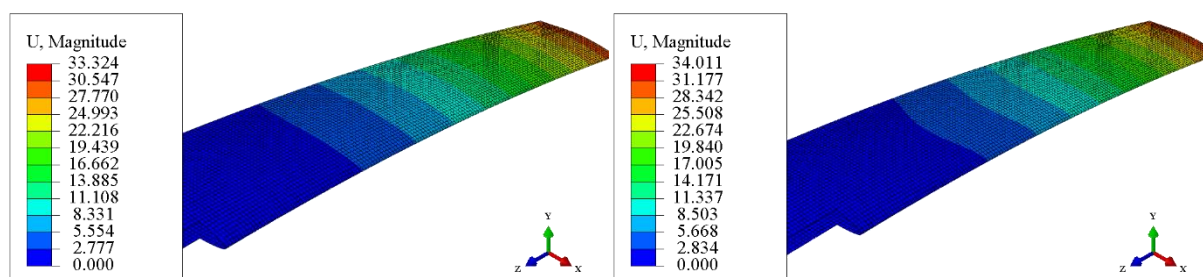


Slika 5.5. Oplata kobilice diskretizirana s 11116 četverokutnih ljuskastih KE drugog reda (S8R)

### 5.1.1. Oplata opterećena nazivnim opterećenjem od 5000 N

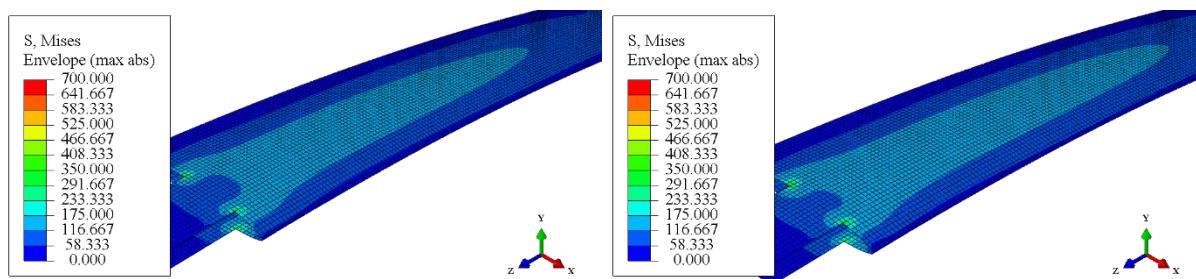
Kao što je napomenuto prije, glavno opterećenje na kobilicu bit će uslijed mase utega koji će biti pričvršćen preko svornjaka za dno kobilice. Uteg je mase 500 kg, što odgovara sili od 5000 N. Tako će najprije biti napravljena analiza pomaka i naprezanja za slučaj djelovanja sile od 5000 N linearnom, a zatim nelinearnom analizom kako bi se utvrdilo hoće li se daljnji proračuni u radu morati provoditi nelinearnom ili linearnom analizom.

Nakon provedenih analiza dobiveni su rezultati za progibe (Slika 5.6.) i za ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (Slika 5.7.). Vidljivo je da je za vrijednost maksimalnog progiba oplata dobiveno 33,324 mm u slučaju linearne analize, dok je u slučaju nelinearne analize dobiveno 34,011 mm. Takva razlika je za inženjerske potrebe zanemariva, ali je potrebno još provjeriti kakva se razlika javlja u naprezanjima na oplati.



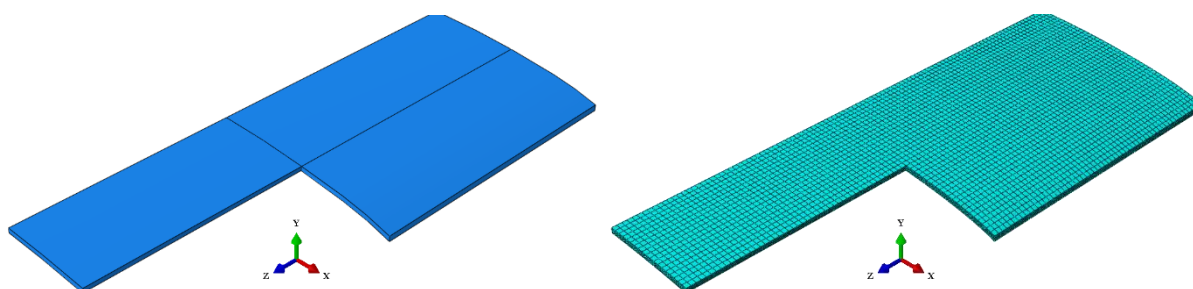
Slika 5.6. Progib (u mm) oplata kobilice debljine 4 mm kod nazivnog opterećenja 5000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom





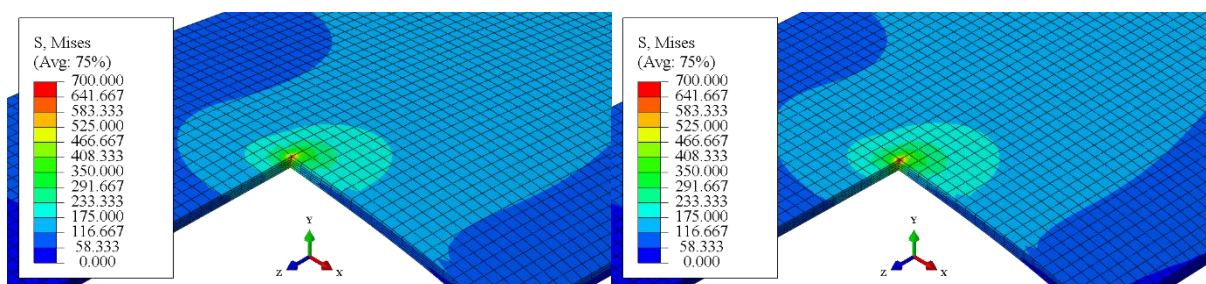
**Slika 5.7. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na oplati kobilice debljine 4 mm kod nazivnog opterećenja 5000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom**

Kod promatranja ekvivalentnog naprezanja prema von Misesu uočava se da se javljaju koncentracije naprezanja na mjestu geometrijskih diskontinuiteta. Kako ljuskasti konačni elementi ne mogu dobro zahvatiti takve koncentracije naprezanja, napravljen je podmodel oko mjesta gdje se javlja najveća koncentracija naprezanja pri čemu se pazilo da rubovi podmodela ne budu na mjestima velikih gradijenata naprezanja jer bi se time utjecalo na točnost rezultata. Stvoren je podmodel prema Slici 5.8. lijevo, koji je diskretiziran s 16160 heksaedarskih konačnih elemenata drugog reda (Slika 5.8. desno).



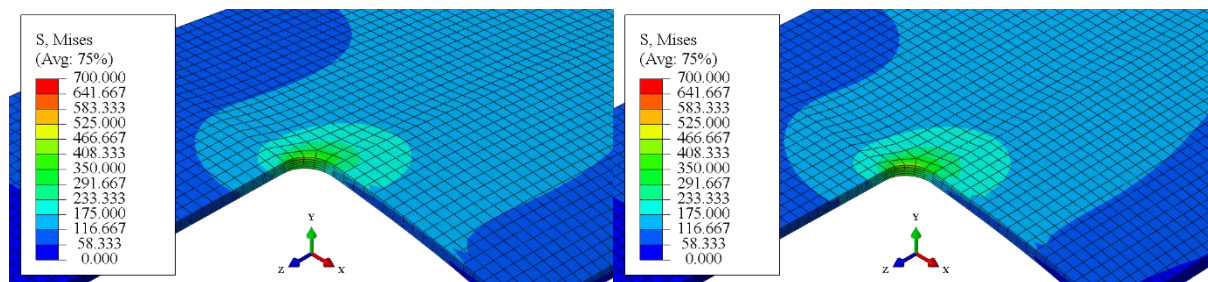
**Slika 5.8. Podmodel oplate kobilice (lijevo) i diskretizirani model s 16160 heksaedarskim KE drugog reda, C3D20R (desno)**

Nakon provedenih analiza dobiveni su rezultati sukladno Slici 5.9. Uočeno je da je razlika u maksimalnim naprezanjima između linearne i nelinearne analize koja se javljaju na mjestu geometrijskog diskontinuiteta oko 10%, dok su naprezanja u područjima koja su dovoljno udaljena od koncentracija naprezanja gotovo jednaka.



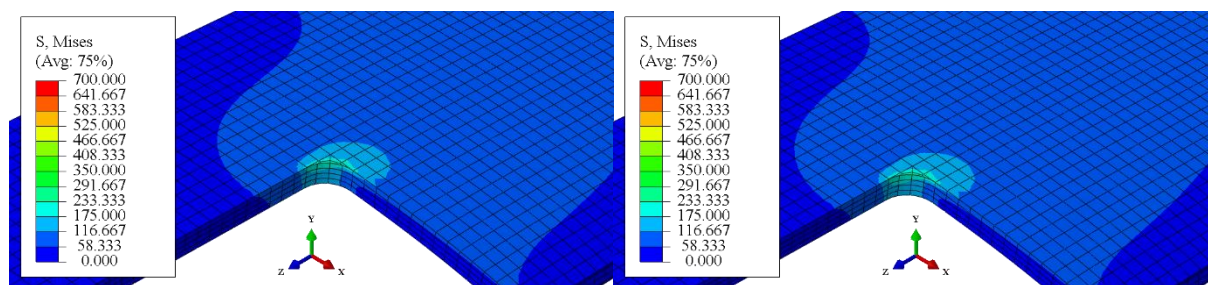
**Slika 5.9. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na podmodelu oplate kobilice debljine 4 mm kod nazivnog opterećenja 5000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom**

Može se dodatno provjeriti što se događa s koncentracijama naprezanja kada se prijelaz izvede pomoću zaobljenja. Iz toga razloga napravljeno je zaobljenje radijusa 10 mm. Takav model diskretiziran je s 16 302 heksaedarskih konačnih elemenata drugog reda, te je provedena linearna i nelinearna analiza (Slika 5.10.). Može se uočiti da je došlo do značajnog smanjenja u koncentracijama naprezanja, a i razlika između linearne i nelinearne analize se smanjila, te će se za inženjersku potrebu uz dovoljnu točnost moći uzimati linearna analiza.



**Slika 5.10. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na podmodelu sa zaobljenjem oplata kobilice debljine 4 mm kod nazivnog opterećenja 5000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom**

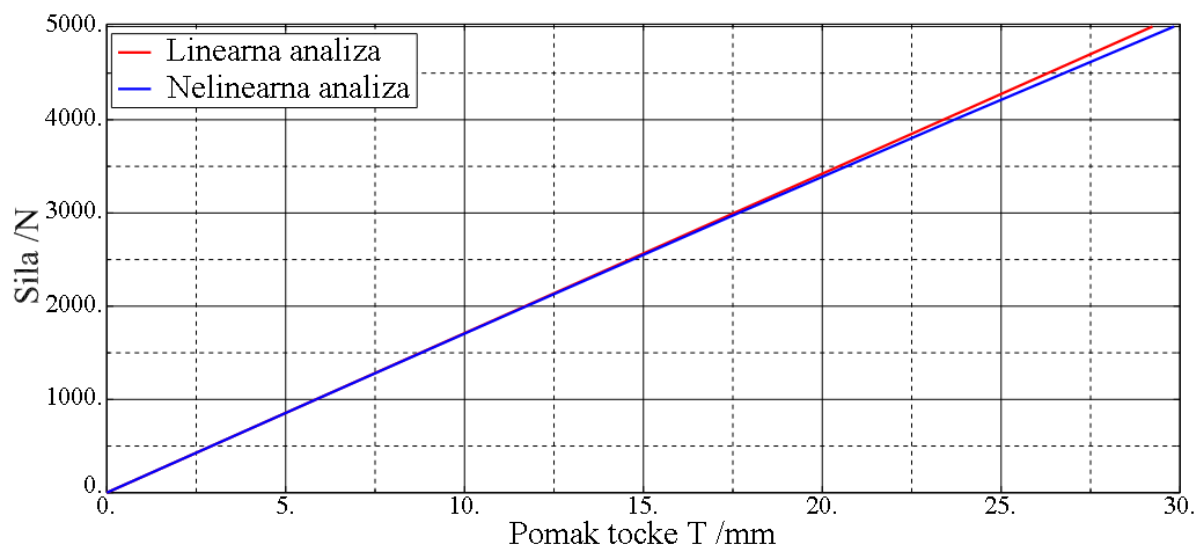
Budući da je pokazano da se izradom zaobljenja na mjestu geometrijskog diskontinuiteta mogu značajno smanjiti koncentracije naprezanja, promotrit će se još situacija što bi se dogodilo s koncentracijama naprezanja ako bi se debljina ploče povećala s 4 na 8 mm. Iz toga razloga provedena je ista analiza kao prije, samo s promijenjenom debljinom oplata. Nakon analize na globalnom ljuskastom modelu napravljen je novi podmodel debljine 8 mm, te je na njemu dodano zaobljenje iznosa 10 mm. Rezultati linearne i nelinearne analize prikazani su na Slici 5.11.



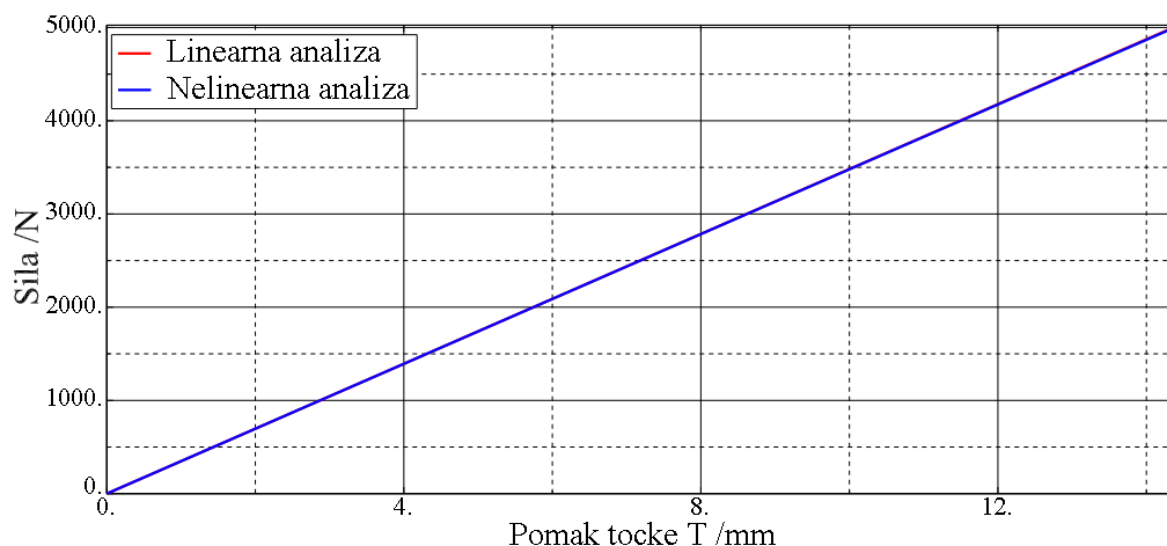
**Slika 5.11. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na podmodelu sa zaobljenjem oplata kobilice debljine 8 mm kod nazivnog opterećenja 5000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom**

Kao što se moglo pretpostaviti, koncentracije naprezanja su se dodatno smanjile. Također, razlika između rezultata dobivenih linearnom i nelinearnom analizom dodatno se smanjila. Time je pokazano da se koncentracije naprezanja koja se javljaju u modelu mogu smanjiti ili izrađivanjem zaobljenja ili povećanjem debljine oplata.

Kako bi se dodatno pokazalo da promatrana oplata za zadano nazivno opterećenje nema naglašeno nelinearno ponašanje, stvoreni su dijagrami ovisnosti koncentrirane sile koja djeluje u referentnoj točki i pomaka točke T (točka je prikazana na Slici 5.4., desno) za debljine oplata 4 i 8 mm. Kao i u slučaju debljine oplata 4 mm (Slika 5.12.), tako je i za debljinu oplata 8 mm (Slika 5.13.) vidljivo da za nazivno opterećenje gotovo nema razlike u rezultatima, tj. rezultati su se u oba slučaja gotovo poklopili.



**Slika 5.12. Dijagram ovisnosti koncentrirane sile i pomaka točke T za debljinu oplata 4 mm kod nazivnog opterećenja od 5000 N**



**Slika 5.13. Dijagram ovisnosti koncentrirane sile i pomaka točke T za debljinu oplata 8 mm kod nazivnog opterećenja od 5000 N**

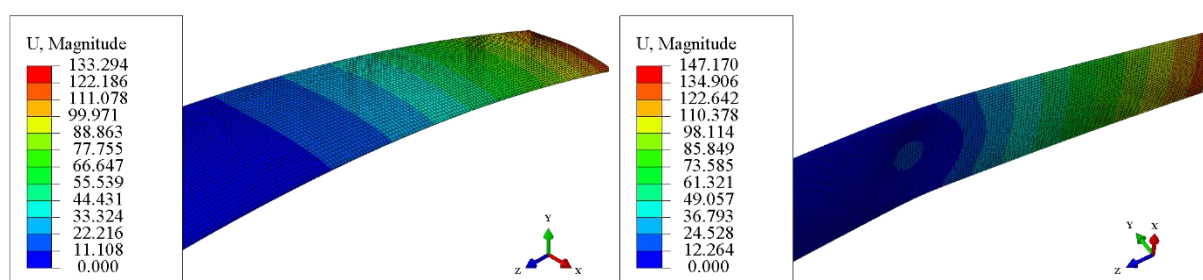


### 5.1.2. Oplata opterećena opterećenjem od 20000 N

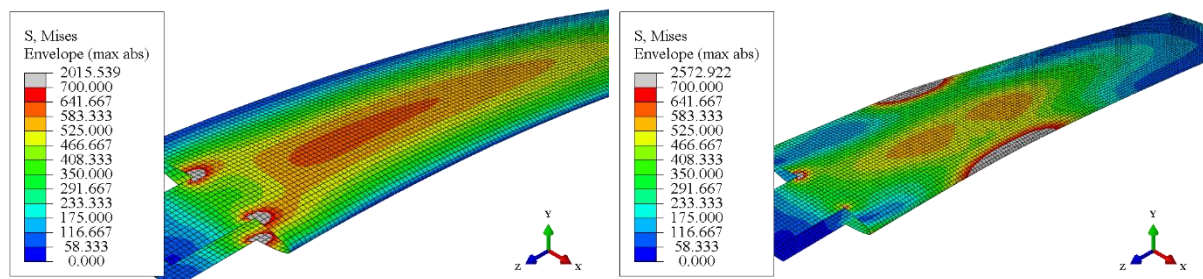
Svi prijašnji proračuni napravljeni su s nazivnim opterećenjem od 5000 N koje će se na kobilici javljati u većini slučajeva u stvarnosti. No, nisu se uzimali u obzir faktori koji se nikako ne mogu sa sigurnošću predvidjeti, a do kojih bi moglo doći, kao npr. udar kobilice u dno mora i sl. Kako bi se ti faktori uzeli u obzir, u daljnjim proračunima uzimat će se umjesto nazivnog opterećenja 5000 N, opterećenje u kojemu je uzet faktor sigurnosti iznosa 4. Tako da će sila iznositi 20000 N. Budući da je povećanje sile s iznosa 5000 na 20000 značajno povećanje sile, treba ponovno provesti linearnu i nelinearnu analizu i usporediti dobivene rezultate.

Oplata kod opterećenja od 20000 N analizirana je za dva slučaja debljine (4 i 8 mm), kako bi se utvrdile razlike u progibima te u koncentracijama naprezanja. Ovdje treba napomenuti da će se kasnije u radu koristiti samo oplata debljine 4 mm, te će dobiveni rezultati služiti samo kao pokazatelj može li se povećanjem debljine značajno utjecati na koncentracije naprezanja. Svakome modelu su ponovno pridruženi rubni uvjeti pomaka i sila sukladno Slici 5.4. te je svaki model diskretiziran s 11116 četverokutnih konačnih elemenata drugog reda (S8R), jednako kao na Slici 5.5.

Nakon provedenih analiza dobiveni su rezultati za progibe (Slika 5.14.) i za ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (Slika 5.15.). Ovdje se uočava razlika između linearne i nelinearne analize. Naime, dok rezultati iz linearne analize pokazuju rezultate slične onima iz prethodnih analiza s nazivnim opterećenjem, iz Slike 5.14. desno vidljivo je da se oplata oko središnjeg dijela udubila i prešla iz konveksnog oblika u konkavni. To je znak da je oplata kod nelinearne analize izgubila na stabilnosti. Razlog takvome ponašanju je vrlo mala debljina oplata zbog čega ona ne može podnijeti zadanu silu. Također je iz Slike 5.15. desno vidljivo da se maksimalna naprezanja javljaju upravo na mjestu gdje je oplata popustila.

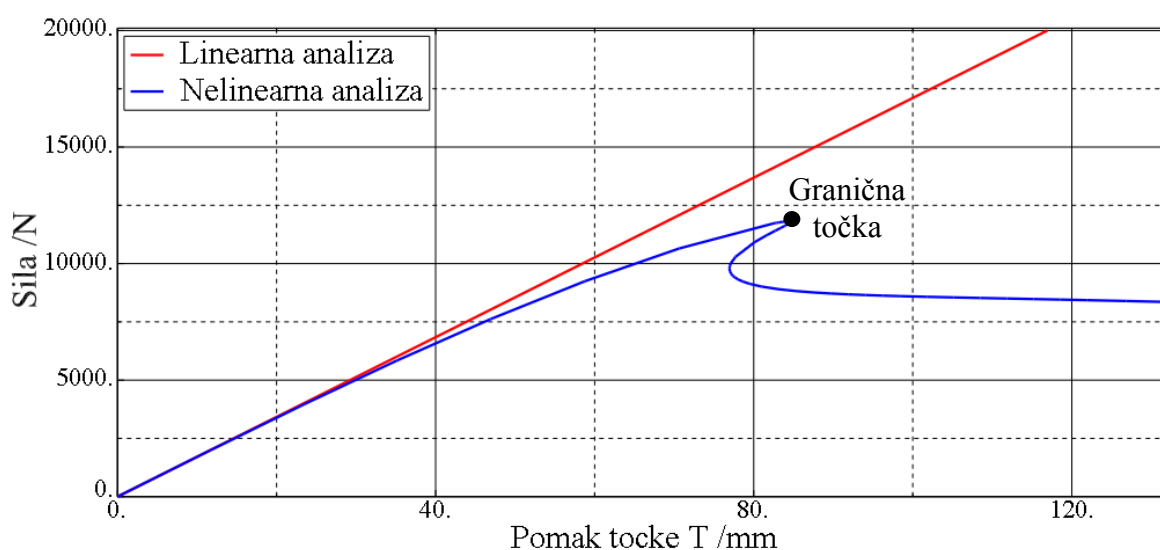


**Slika 5.14. Progib (u mm) oplata kobilice debljine 4 mm kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom**



**Slika 5.15. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na oplati kobilice debljine 4 mm kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom**

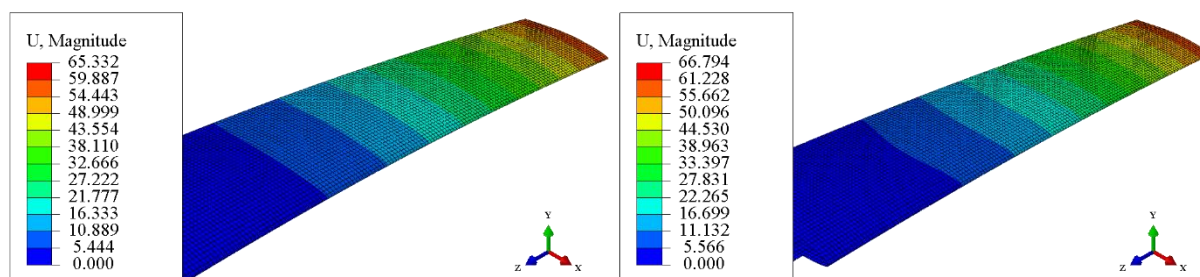
Kako bi se utvrdilo kod kojeg opterećenja oplata popusti, stvoren je dijagram ovisnosti koncentrirane sile koja djeluje u referentnoj točki i pomaka točke T (točka je prikazana na Slici 5.4., desno) za prethodne analize (Slika 5.16.). Dok kod linearne analize nema naznaka za gubitak stabilnosti, kod nelinearne analize se kod opterećenja od otprilike 12000 N uočava tzv. *snap back* problem. Nakon što se u analizi prešla granična točka (točka maksimuma na krivulji nelinearne analize), najprije dolazi do smanjenja pomaka uz smanjenje iznosa opterećenja, a zatim ponovno dolazi od nekontroliranog povećanja pomaka točke T uz daljnje smanjenje opterećenja. Iz tih dobivenih rezultata može se zaključiti da oplata debljine 4 mm nikako ne može izdržati zadano opterećenje od 20000 N. Mogući načini na koje bi se riješio taj gubitak stabilnosti je povećanje debljine oplate ili ugradnja ukruta u unutrašnjosti oplate. Oba načina će biti prikazana u nastavku rada.



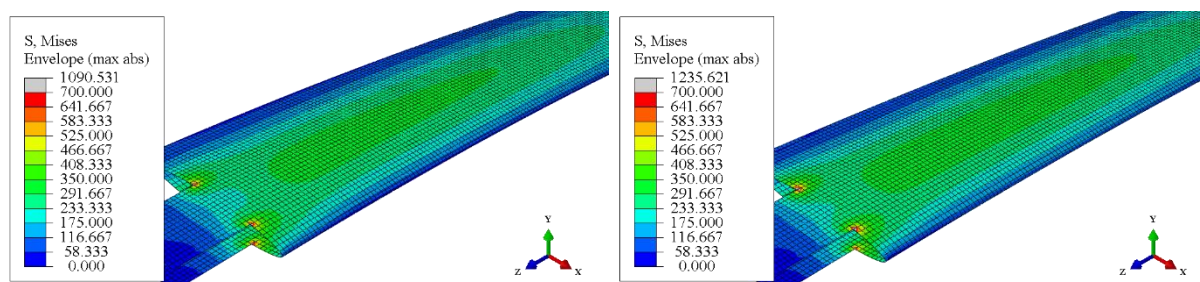
**Slika 5.16. Dijagram ovisnosti koncentrirane sile i pomaka točke T za debljinu oplate 4 mm kod opterećenja od 20000 N**

Budući da oplata debljine 4 mm kod opterećenja 20000 N izgubi stabilnost kod nelinearne analize, nema smisla analizirati koncentracije naprezanja jer se dobiveni rezultati za naprezanja ne mogu uspoređivati s rezultatima dobivenim linearnom analizom. Iz toga razloga prije same analize čvrstoće cijele kobilice analizirat će se oplata debljine 8 mm. Oplata je diskretizirana na isti način kao i kod prethodnih analiza sa istim rubnim uvjetima sila i pomaka, jedino je promijenjena debljina. Nakon provedenih analiza dobiveni su rezultati za progibe (Slika 5.17.) i za ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (Slika 5.18.).

Kao što se moglo pretpostaviti, povećanjem debljine oplate dolazi do smanjenja progiba oplate i do smanjenja maksimalnog naprezanja koje se javlja na oplati. Također se uočava da u ovome slučaju ne dolazi do gubitka stabilnosti, već oplata izdrži zadano opterećenje od 20000 N. Prema tome, ovdje ima smisla uspoređivati dobivene rezultate. Relativna razlika u maksimalnim pomacima je manja od 5%, dok će se koncentracije naprezanja dodatno ispitati na podmodelima.

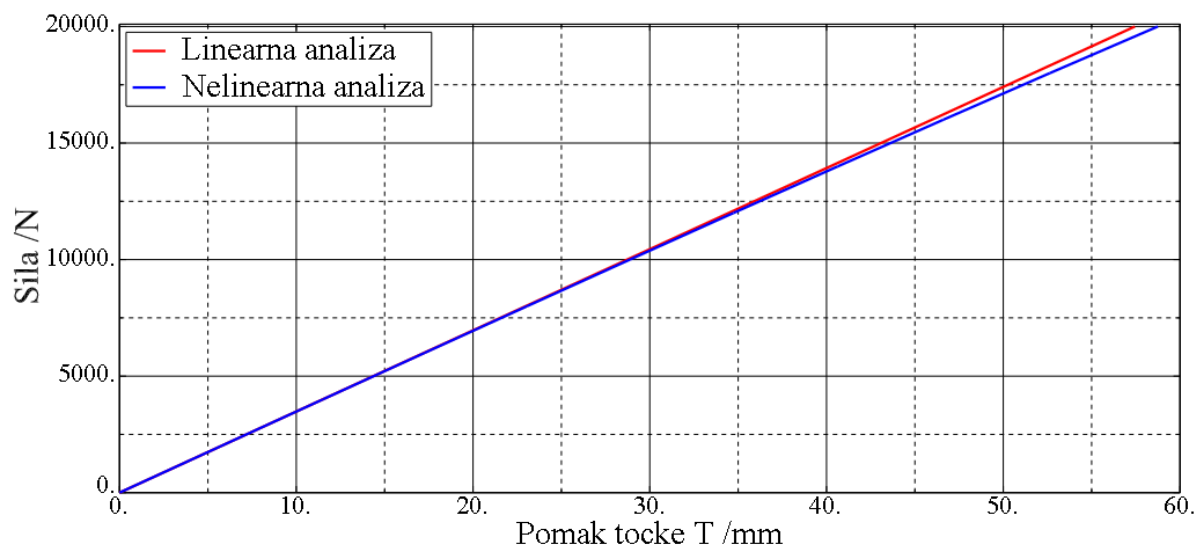


**Slika 5.17. Progib (u mm) oplata kobilice debljine 8 mm kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom**



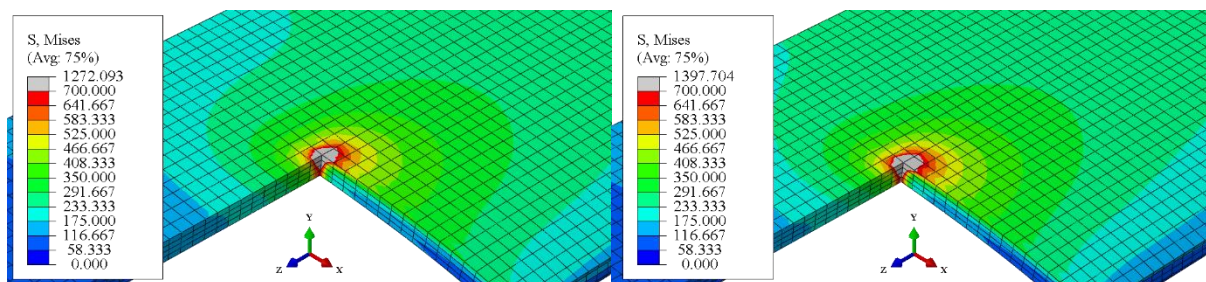
**Slika 5.18. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na oplati kobilice debljine 8 mm kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom**

Prije analize koncentracija naprezanja na podmodelima stvoren je dijagram ovisnosti koncentrirane sile koja djeluje u referentnoj točki i pomaka točke T (točka je prikazana na Slici 5.4., desno) za prethodne analize (Slika 5.19.). Vidljivo je da su dobiveni rezultati za pomake zanemarivi i da se rezultati gotovo poklapaju.

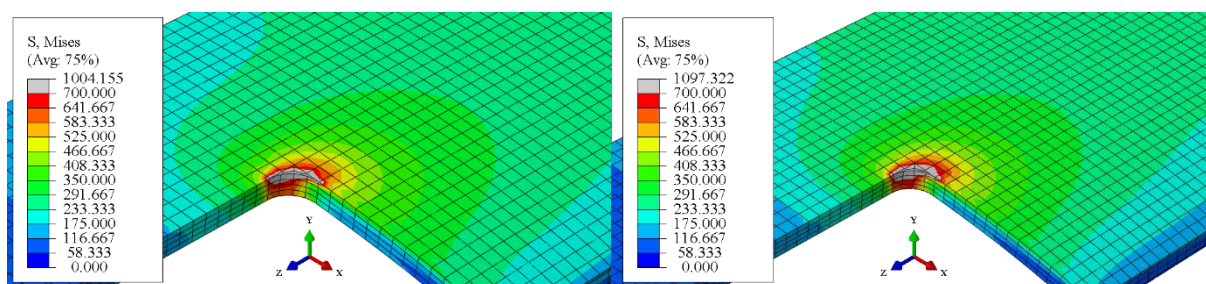


**Slika 5.19. Dijagram ovisnosti koncentrirane sile i pomaka točke T za debljinu oplata 8 mm kod opterećenja od 20000 N**

Kako bi se dodatno ispitala koncentracije naprezanja, napravljeni su podmodeli oplata debljine 8 mm identični onima koji su korišteni kod analize naprezanja pri nazivnom opterećenju od 5000 N. Najprije je provedena linearna i nelinearna analiza kod modela bez zaobljenja (Slika 5.20.), a zatim te iste analize kod modela sa zaobljenjem radijusa 10 mm (Slika 5.21.). Kao kod modela bez zaobljenja, tako se i kod modela sa zaobljenjem uočava da su razlike u maksimalnim naprezanjima između linearne i nelinearne analize za inženjerske potrebe zanemarive.



**Slika 5.20. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na podmodelu oplata kobilice debljine 8 mm kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom**



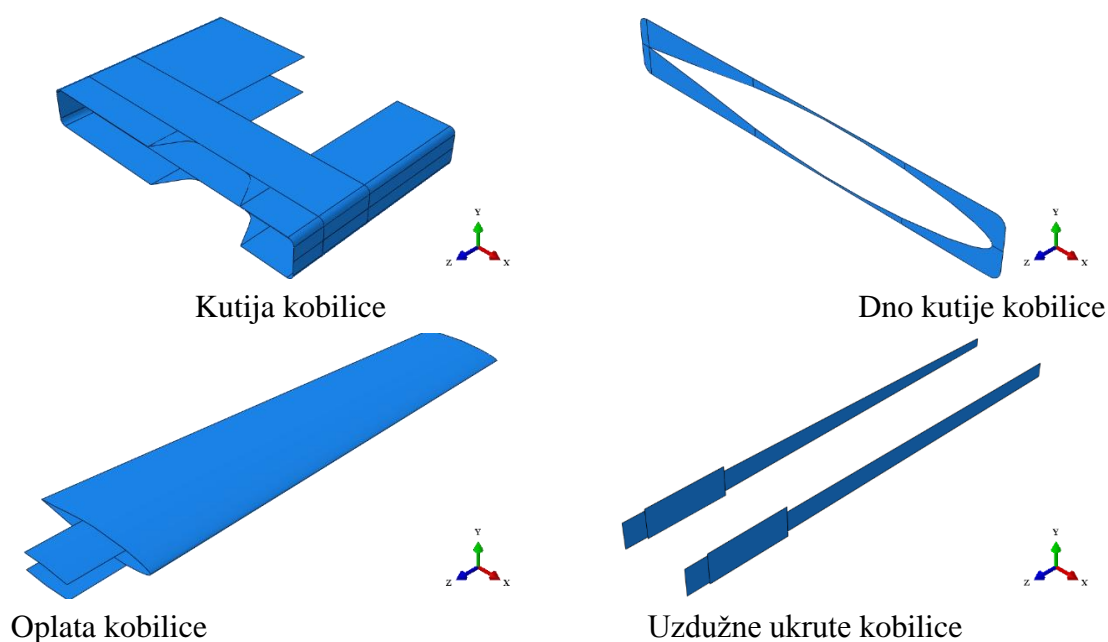
**Slika 5.21. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na podmodelu sa zaobljenjem oplata kobilice debljine 8 mm kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom**

Na temelju analiza provedenih na podmodelima oplata debljine 8 mm kod opterećenja od 20000 N ponovno je pokazano da se koncentracije naprezanja mogu značajno smanjiti izradom zaobljenja na mjestima naglih geometrijskih prijelaza, što je bilo i očekivano jer geometrijski diskontinuiteti predstavljaju vrstu singulariteta i potrebnu ih je pod svaku cijenu izbjegavati. Također je pokazano da se povećanjem debljine oplata ne dolazi do gubitka stabilnosti, te da se razlike između linearne i nelinearne analize značajnu smanjuju do zanemarivih vrijednosti. Naravno, povećanje debljine oplata povlači za sobom dodatnu masu koju će oplata imati, što nije poželjno, a i izrada oplata koja ima veću debljinu od 4 mm je s tehnološke strane mnogo zahtjevnija i skuplja. Iz tih razloga kod analiza cijele kobilice koristit će se oplata debljine 4 mm, dok će se problem stabilnosti pokušavati riješiti ugradnjom uzdužnih ukruta.

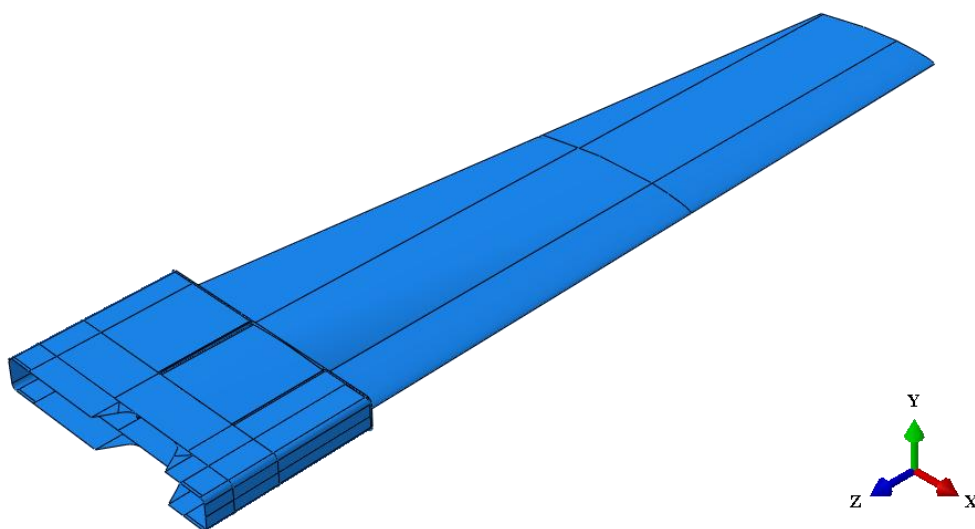


## 5.2. Analiza čvrstoće cijele kobilice

Nakon provedene detaljne analize samo oplata kobilice potrebno je provjeriti ponašanje cijele kobilice. Iz toga je razloga svaki pojedini dio kobilice najprije iz trodimenzionalnog modela pretvoren u ljuskasti model kako bi se mogao diskretizirati ljuskastim konačnim elementima. Slika 5.22. prikazuje pojedine ljuskaste modele dijelova kobilice. Nakon stvaranja pojedinih dijelova, oni su spojeni jedan novi model. To je učinjeno iz razloga jer su se nakon spajanja pojedinih dijelova javljale praznine između pojedinih dijelova koje su bile posljedice stvaranja ljuskastih modela. Uklanjanjem tih praznina sprječava se stvaranje numeričke greške i postiže se dobivanje realnijih rezultata. Nakon što je dobiven ljuskasti model cijele kobilice provedeno je dijeljenje (*engl. partiton*) kako bi se kasnije mogla postići strukturirana mreža konačnih elemenata (Slika 5.23.).



Slika 5.22. Ljuskasti modeli dijelova kobilice

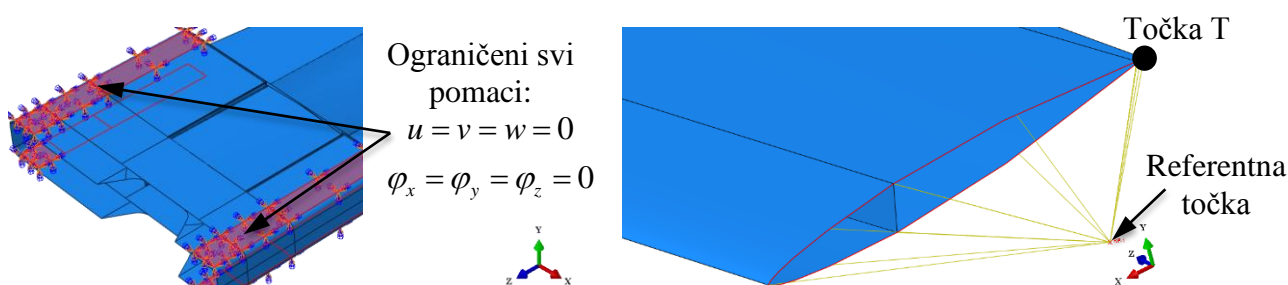


Slika 5.23. Ljuskasti model kobilice

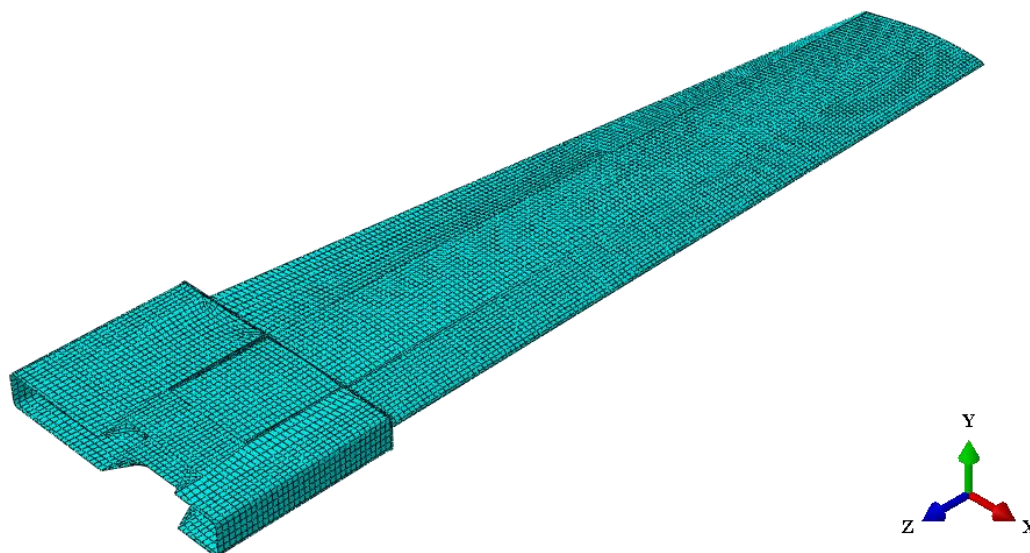


Nakon definiranja geometrije kobilice, pridružena su joj materijalna svojstva ista kao i kod analize čvrstoće samo oplata, uz napomenu da je svakome dijelu kobilice pridružena debljina ljuske od 4 mm. Prije nego što se stvorila mreža konačnih elemenata, na kobilici su još definirani rubni uvjeti pomaka i sila. Rubni uvjeti sila su identični onima koji su korišteni kod analize samo oplata, tj. u referentnu točku dodana je koncentrirana sila iznosa 20000 N. Rubni uvjeti pomaka definirani su na način da su svi pomaci ograničeni ploham po kojima će kobilica kliziti u kutiju prilikom jedrenja. Prikaz definiranih rubnih uvjeta je na Slici 5.24.

Podjela kobilice na više dijelova omogućila je stvaranje strukturirane mreže konačnih elemenata. Cijela kobilica je diskretizirana s ukupno 18125 četverokutnih ljuskastih konačnih elemenata drugog reda (S8R). Razloga za korištenje tih elemenata je kasnije korištenje metoda podmodeliranja, te da se osigura kompatibilnost između čvorova na mjestu gdje će se morati postaviti potrebni rubni uvjeti podmodela. Diskretizirani model kobilice prikazan je na Slici 5.25.

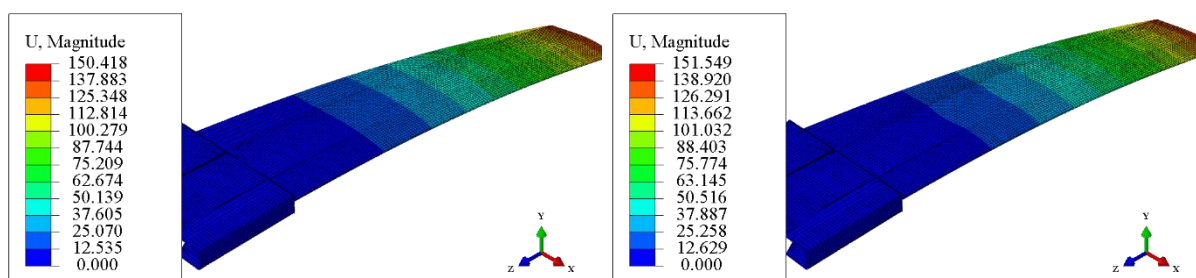


**Slika 5.24. Rubni uvjeti pomaka (lijevo) i referentna točka preko koje su zadani rubni uvjeti sila (desno) na ljuskastom modelu kobilice**

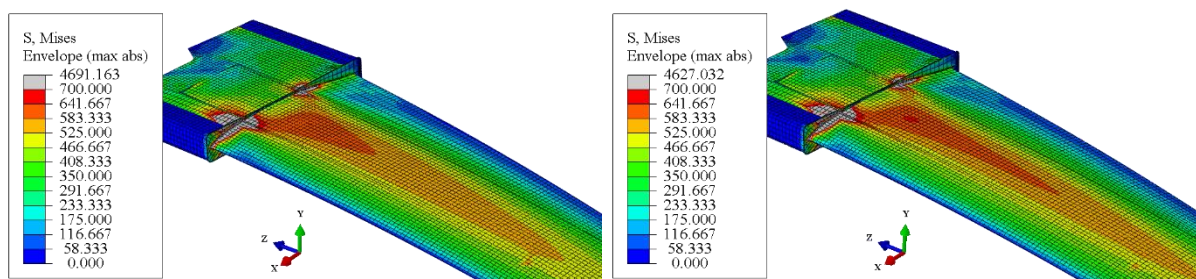


**Slika 5.25. Kobilica diskretizirana s 18125 četverokutnih ljuskastih KE drugog reda (S8R)**

Proveden je numerički proračun, te su dobiveni rezultati za progibe (Slika 5.26.) i za ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (Slika 5.27.). Uočava se da za ovakvu izvedbu kobilice ne dolazi do gubitka stabilnosti. Razlog zbog kojeg ne dolazi su uzdužne ukrute koje se nalaze unutar oplata kobilice i koje sprječavaju izvijanje oplata. Kako ne dolazi do gubitka stabilnosti, dobiveni rezultati linearne i nelinearne analize mogu se uspoređivati. Prema tome, uočava se da je relativna razlika između maksimalno dobivenih progiba zanemarivo mala, što je jedan od pokazatelja da se kobilica za zadano opterećenje ponaša linearno. Također se uočava da su rezultati za maksimalno naprezanje na kobilici relativno bliski, ali se te koncentracije naprezanja moraju dodatno ispitati koristeći trodimenzijske konačne elemente.

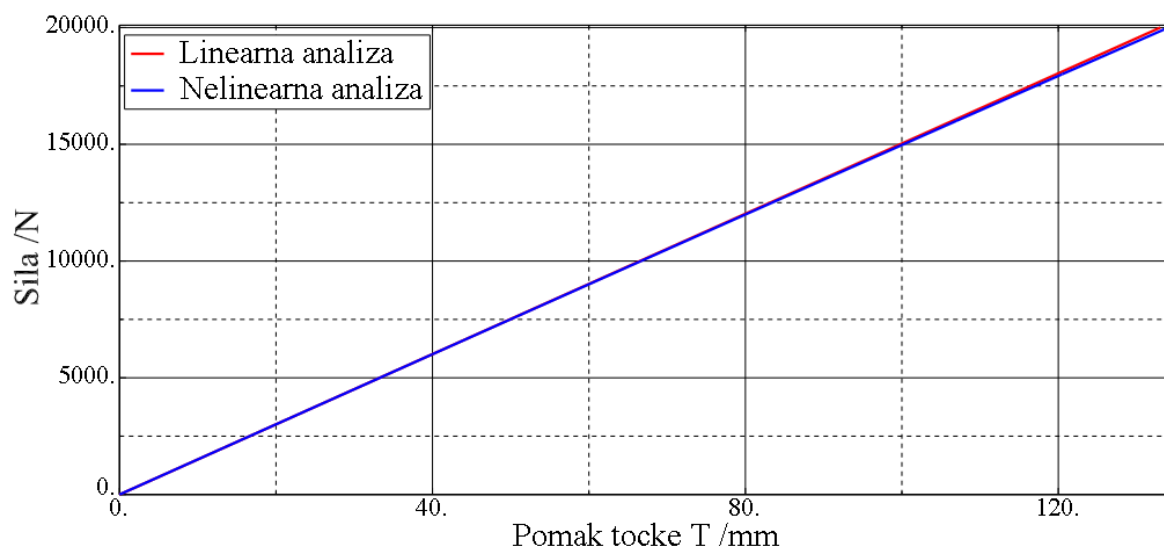


**Slika 5.26. Progib (u mm) kobilice kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom**



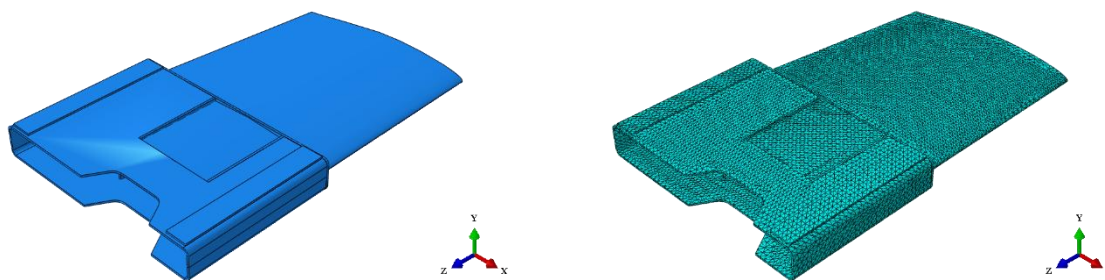
**Slika 5.27. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na kobilici kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom**

Kako bi se dodatno pokazalo da se kobilica za zadano opterećenje od 20000 N ponaša linearno, stvoren je dijagram ovisnosti koncentrirane sile koja djeluje u referentnoj točki i pomaka točke T (točka je prikazana na Slici 5.24., desno) za prethodne analize (Slika 5.28.). Vidljivo je da su dobiveni rezultati za pomake zanemarivi i da se rezultati gotovo poklapaju.



**Slika 5.28. Dijagram ovisnosti koncentrirane sile i pomaka točke T za kobilicu kod opterećenja od 20000 N**

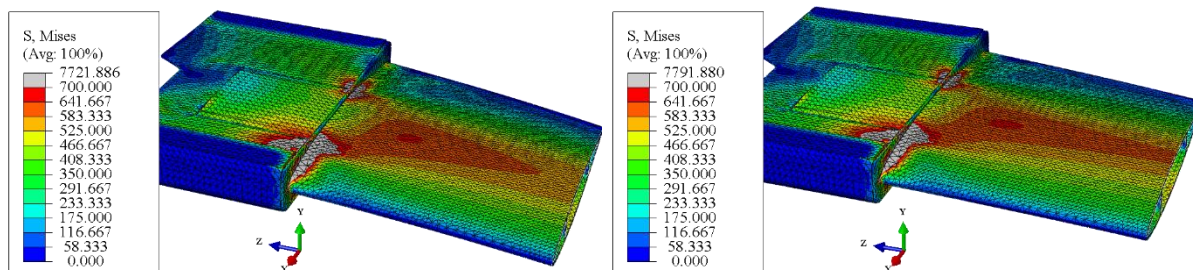
Na kraju preostaje još samo analiza koncentracija naprezanja koja se javljaju na kobilici uslijed opterećenja od 20000 N koje djeluje na nju. Kako se koncentracije naprezanja na globalnom ljuskastom modelu (Slika 5.27.) javljaju na velikom području oko mjesta spoja oplata i kutije, stvoren je veći podmodel nego kod analize samo oplata (Slika 5.29., lijevo). To je učinjeno iz razloga da se izbjegne kasnije postavljanje rubnih uvjeta podmodela na području gdje se javljaju veliki gradijenti naprezanja. Zbog relativno složene geometrije kobilice nije bilo moguće stvaranje strukturirane mreže heksaedarskih konačnih elemenata, već je stvorena mreža od 74359 tetraedarskih konačnih elemenata drugog reda (C3D10). Mreža konačnih elemenata prikazana je na Slici 5.29. desno.



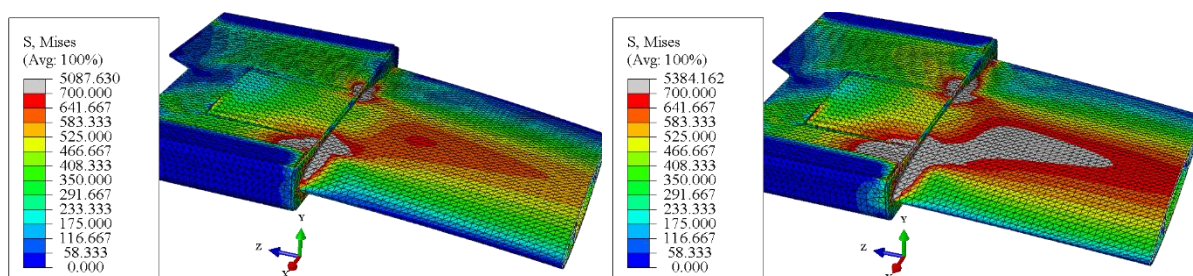
**Slika 5.29. Podmodel kobilice (lijevo) i diskretizirani model s 74359 tetraedarskih KE drugog reda, C3D10 (desno)**

Nakon provedenih analiza dobiveni su rezultati sukladno Slici 5.30. Vidljivo je da je razlika u maksimalnim naprezanjima između linearne i nelinearne analize koja se javlja na mjestu geometrijskog diskontinuiteta manja od 1%. Dodatno se provjerilo što se događa s koncentracijama naprezanja kada se na mjestima geometrijskih diskontinuiteta stvore zaobljenja. Iz toga razloga napravljena su zaobljenja radijusa 5 mm oko mjesta spoja oplata kobilice i kutije. Takav je model diskretiziran s 68358 tetraedarskih konačnih elemenata drugog

reda, te je provedena linearna i nelinearna analiza (Slika 5.31.). Može se uočiti da je došlo do značajnog smanjenja u koncentracijama naprezanja. Uočljivo je da se kod nelinearne analize kobilice sa zaobljenjima područje kod kojih je naprezanje iznad granice razvlačenja (700 MPa) proširilo po području oplate kobilice. To se događa zato što izrađivanjem zaobljenja na prijelazima naprezanja nisu više koncentrirana na malome području, već se su jednoličnije raspodijeljena po cijelom području kobilice.



**Slika 5.30. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na podmodelu kobilice kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom**



**Slika 5.31. Ekvivalentno naprezanje prema von Misesu (u MPa) na podmodelu kobilice sa zaobljenjima kod opterećenja 20000 N dobiveno linearnom (lijevo) i nelinearnom (desno) analizom**

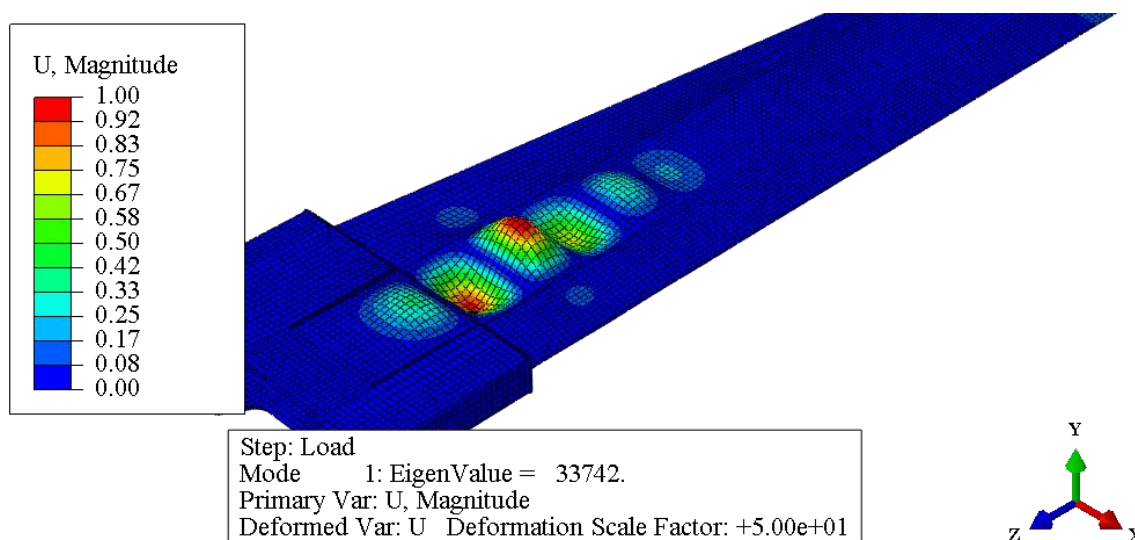
Nakon provedenih svih analiza može se zaključiti da se postojeća izvedba kobilice za zadano opterećenje od 20000 N ponaša linearno, te se ne trebaju provoditi nelinearni proračuni ako se značajno ne mijenja sama geometrija ili se ako se opterećenje ne poveća višestruko. Također je pokazano da se kod takve izvedbe javljaju velike koncentracije naprezanja na mjestima spoja oplate i kutije kobilice. Te velike koncentracije naprezanja ne mogu se ukloniti jednostavno izradom zaobljenja na mjestu spoja, već je na tom mjestu potrebno povećati debljinu oplate i kutije, budući da je kod analize samo oplata pokazano da se povećanjem debljine mogu značajno smanjiti koncentracije naprezanja. Pritom postoji mogućnost povećanja debljine cijele kobilice, što će imati za posljedicu veliko povećanje mase ili ojačavanje samo dijela kobilice gdje se javljaju velike koncentracije naprezanja, što je s tehnološke strane zahtjevnije jer bi se trebalo koristiti mnogo više spajanje dijelova, odnosno postojalo bi mnogo više dijelova koje bi onda bilo zahtjevnije spojiti zajedno.



### 5.3. Kontrola stabilnosti kobilice

Pokazano je da se kod kobilice izrađene od visokočvrstog čelika javljaju velike koncentracije naprezanja na mjestu spoja oplata i kutije. Osim proračuna čvrstoće potrebno je provesti i proračun kontrole stabilnosti, budući da je kobilica vrlo vitka konstrukcija. Kako je pokazano da se zadana izvedba kobilice za zadano opterećenje od 20000 ponaša linearno, provest će se linearna analiza u svrhu ispitivanja kod koje sile opterećenja dolazi do gubitka stabilnosti.

Kobilica u analizi gubitka stabilnosti imat će jednake rubne uvjete pomaka kao i kod proračuna čvrstoće (Slika 5.24. lijevo). Rubni uvjeti sila ponovno će se zadavati preko koncentrirane sile koja djeluje u referentnoj točki (Slika 5.24. desno), ali će se uzeti jedinična vrijednost sile. Time će prva vlastita vrijednost biti odmah iznos kritične sile kojom se kobilica najviše smije opteretiti da dođe do gubitka stabilnosti. Za diskretizaciju će se koristiti ponovno ista mreža kao i kod proračuna čvrstoće (Slika 5.25.), tj. kobilica će biti diskretizirana s 18185 četverokutnih ljuskastih KE drugog reda za analizu tankih ljusaka (S8R5). Kako je za inženjerske potrebe najbitnija prva vlastita vrijednost, odnosno prva forma gubitka stabilnosti, u nastavku će biti prikazani rezultati samo za tu formu (Slika 5.32.).

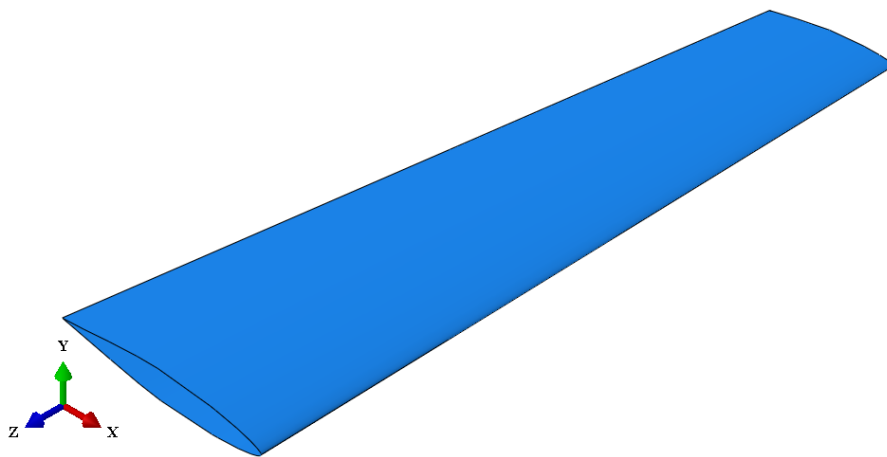


**Slika 5.32. Prva forma gubitka stabilnosti kobilice izrađene od visokočvrstog čelika**

Kao što se može vidjeti sa Slike 5.32., dobivena je vrijednost za prvu vlastitu vrijednost 33742 N. Budući da se opteretilo jediničnom silom, prva vlastita vrijednost je ujedno i iznos kritične sile kojom se kobilica smije opteretiti da dođe do gubitka stabilnosti. Dobivena kritična sila je više od opterećenja koje se koristilo kod proračuna čvrstoće. Prema tome, može se zaključiti da kobilica izrađena od visokočvrstog čelika neće izgubiti stabilnost kod zadanog opterećenja, ali je pokazano da će se javiti velike koncentracije naprezanja oko mjesta spoja oplata i kobilice zbog čega se na tome dijelu treba provesti izmjene u geometriji.

## 6. PRORAČUN ČVRSTOĆE I KONTROLA STABILNOSTI KOBILICE IZRAĐENE OD KOMPOZITNOG MATERIJALA

Kobilica se u većini slučajeva izrađuje od visokočvrstog čelika zbog dobrih materijalnih svojstava. Danas se sve češće u brodogradnji i zrakoplovstvu koriste kompozitni materijali zbog vrlo dobrih mehaničkih svojstva i zbog male mase. U ovome poglavlju bit će ispitana kobilica izrađena upravo od kompozitnog materijala, odnosno od ugljičnih i staklenih vlakana koja imaju epoksidnu matricu. Ugljično-epoksidni kompozit korist će se na mjestima koja nisu kritična, dok će se ugljično-epoksidni kompoziti koristiti na mjestima najvećih naprezanja. Kako je u prethodnom poglavlju pokazano da je oplata kobilice najopterećeniji dio kobilice, ovdje će biti ispitana samo oplata i to u izvedbi bez gornjih uha (Slika 6.1.).



Slika 6.1. Kompozitna izvedba oplata kobilice

U poglavlju 2. opisano je da kompozitni materijali spadaju u skupinu ortotropnih materijala. To znači da za njih nisu dovoljna dva parametra, kao kod izotropnih materijala (npr. čelik), kako bi se u potpunosti definirala. Za potpuno opisivanje jednog kompozitnog sloja potrebno je minimalno pet podataka. Ti podaci su za ugljično-epoksidne i stakleno-epoksidne kompozitne slojeve prikazani u Tablici 6.1. i 6.2. Ovdje treba napomenuti da su svojstva kompozitnih slojeva odabrana proizvoljno iz literature ([14]), budući da ne postoje podaci o realnim svojstvima kompozitnih slojeva koja bi se koristila kod takve izvedbe oplata.

Tablica 6.1. Svojstva materijala za ugljično-epoksidnog kompozita

<i>Debljina sloja</i>	<i>Gustoća</i>	<i>Modul elastičnosti u smjeru vlakana</i>	<i>Modul elastičnosti okomito na smjer vlakana</i>	<i>Modul smicanja</i>	<i>Poissonov faktor</i>
0,33 mm	$1,8 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m}^3$	74000 MPa	74000 MPa	4550 MPa	0,05

Tablica 6.2. Svojstva materijala za stakleno-epoksidnog kompozita

<i>Debljina sloja</i>	<i>Gustoća</i>	<i>Modul elastičnosti u smjeru vlakana</i>	<i>Modul elastičnosti okomito na smjer vlakana</i>	<i>Modul smicanja</i>	<i>Poissonov faktor</i>
0,4 mm	$2,2 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m}^3$	29700 MPa	29700 MPa	5300 MPa	0,17

Osim što kompozitni materijali imaju više materijalnih parametara od izotropnih materijala, razlikuju se u mehanizmima popuštanja materijala. Kod kompozita se oni ne mogu opisati klasičnim pristupom kao krhki ili duktilni lom. Razlog tome je taj što se kod kompozita radi o spajanju velikog broja slojeva, a niti sam sloj nije homogen, već se sastoji od barem dva konstituenta. Iz toga se razloga popuštanje može dogoditi na vrlo različite načine. Kriteriji popuštanja postavljaju se uvijek za jedan sloj, a naprezanja koja ulaze u kriterije nisu glavne vrijednosti tenzora naprezanja već vrijednosti naprezanja u sustavu glavnih materijalnih osi. Pritom je nužno poznavati pet parametara čvrstoće. Spomenuti parametri čvrstoće za ugljično-epoksidne i stakleno-epoksidne kompozite (prema [14]) prikazani su u Tablici 6.3. i 6.4.

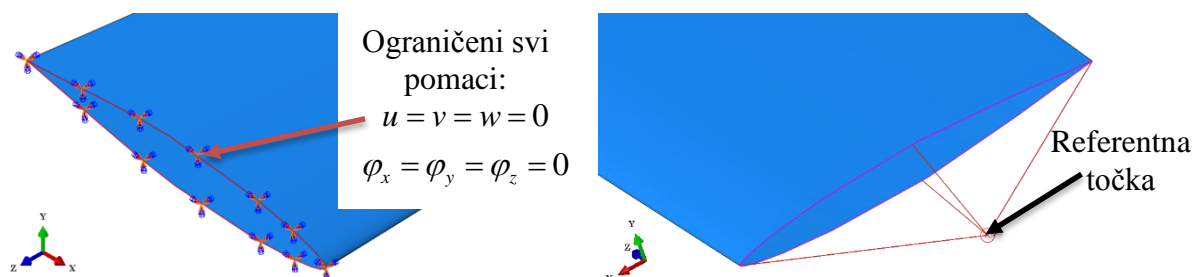
**Tablica 6.3. Parametri čvrstoće (u MPa) ugljično-epoksidnog kompozita**

Vlačna čvrstoća u pravcu vlakna	Tlačna čvrstoća u pravcu vlakna	Vlačna čvrstoća okomito na pravac vlakna	Tlačna čvrstoća okomito na pravac vlakna	Smična čvrstoća
499	352	458	352	46

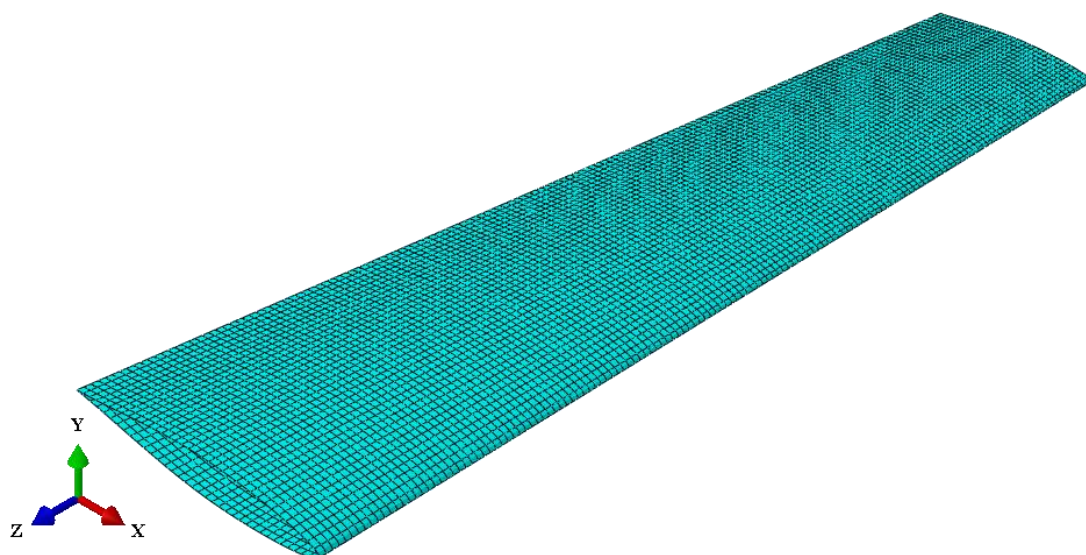
**Tablica 6.4. Parametri čvrstoće (u MPa) stakleno-epoksidnog kompozita**

Vlačna čvrstoća u pravcu vlakna	Tlačna čvrstoća u pravcu vlakna	Vlačna čvrstoća okomito na pravac vlakna	Tlačna čvrstoća okomito na pravac vlakna	Smična čvrstoća
367	549	367	549	97

Prije nego što se dodaju materijalna svojstva oplati, postavljeni su rubni uvjeti pomaka i sila (Slika 6.2.) na isti način kao i kod izvedbe oplata od visokočvrstog čelika (Odjeljak 5.1.). Gornji rub je ukliješten, a donji rub je pomoću kinematičkih veza povezan s referentnom točkom u koju je zadana koncentrirana sila iznosa 20000 N u smjeru suprotnom od globalne Y-osi. Zatim je model diskretiziran s 10584 četverokutnih ljuskastih konačnih elemenata drugog reda za analizu tankih ljusaka (S8R5), budući da se ovdje neće raditi podmodeliranje pa nema potrebe za korištenjem elemenata koji imaju šest stupnjeva slobode po čvoru.

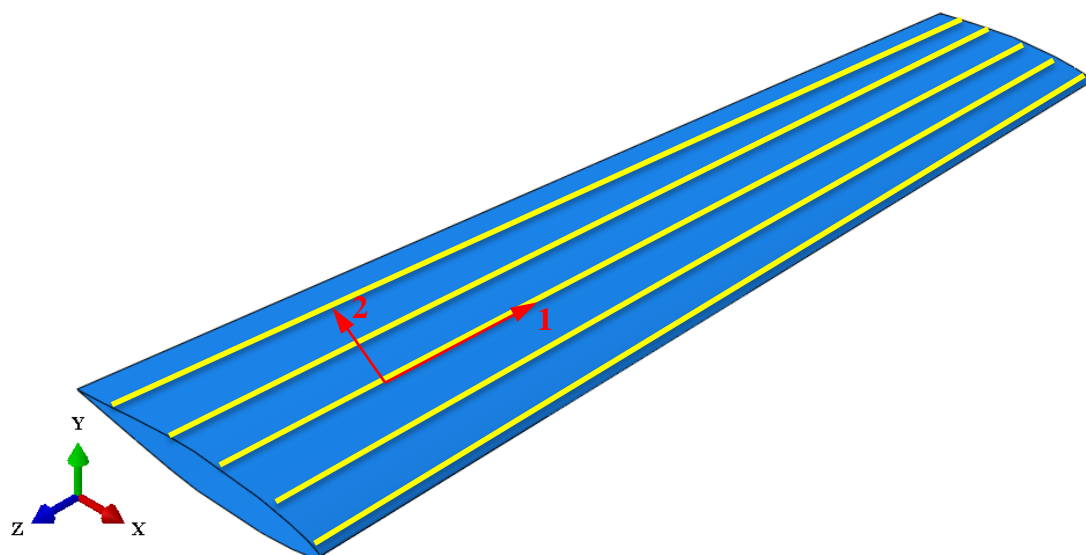


**Slika 6.2. Rubni uvjeti pomaka (lijevo) i referentna točka preko koje su zadani rubni uvjeti sila (desno) na kompozitnoj izvedbi oplata kobilice**



**Slika 6.3. Kompozitna izvedba oplata kobilice diskretizirana s 10584 četverokutnih ljuskastih KE drugog reda (S8R5)**

Svojstva oplata će najvećim dijelom ovisiti o smjeru vlakana. Kako bi se kasnije u opisivanju znalo od kuda se mjeri rotacija vlakana, na Slici 6.4. prikazano je kvalitativno usmjerenje vlakana na oplati kada se zadaje da su one pod kutem od  $0^\circ$  (vlakna su žute boje). Ona su usmjerena u smjeru lokalne materijalne osi 1, a pozitivna rotacija vlakana je definirana pravilom desne ruke lokalnog koordinatnog sustava.

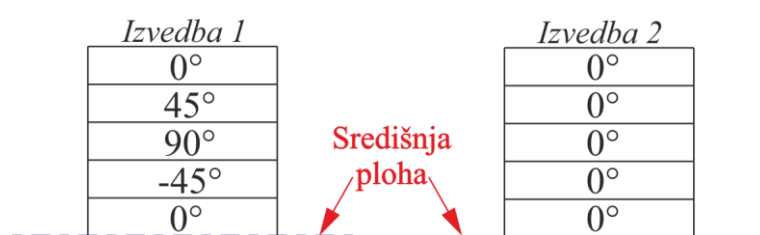


**Slika 6.4. Usmjerenje vlakana na oplati pod kutem od  $0^\circ$**



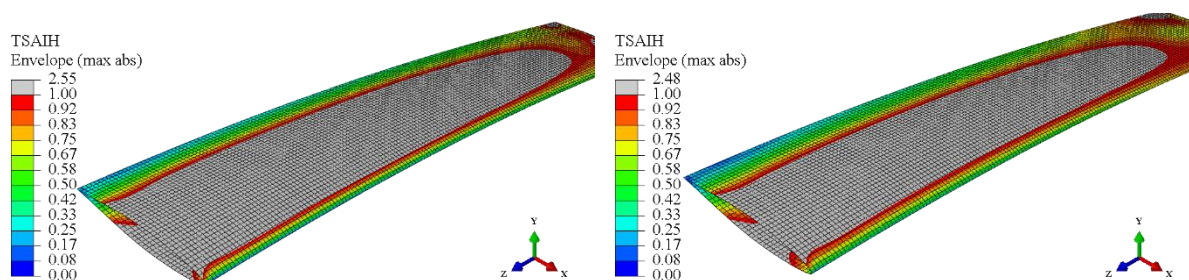
## 6.1. Oplata debljine 4 mm izrađena od stakleno-epoksidnog kompozita

Najprije će biti analizirana oplata debljine 4 mm koja je cijela izrađena od stakleno-epoksidnog kompozita. Stvoren je kompozitni sloj (laminat) sukladno svojstvima iz Tablice 6.2., te su dodani parametri čvrstoće (Tablica 6.4.) kako bi se kasnije mogli promatrati kriteriji popuštanja. Nakon stvaranja jednog sloja, potrebno je napraviti raspored po kojem će se slojevi javljati s promjenom visine. Budući da se koristi simetrični raspored slojeva, dovoljno je da se orijentacija pojedinog sloja definira samo za polovicu kompozita. Oplata će se ispitati za dvije izvedbe rasporeda slojeva. Prva izvedba je kada su slojevi razmaknuti pod kutem od  $45^\circ$  jedan u odnosu na drugi, a druga izvedba je kada su svi slojevi jednako usmjereni ( $0^\circ$ ). Budući da su najbolja materijalna svojstva u smjeru vlakana, pretpostavlja se da će takva izvedba (2.) za takav način opterećivanja (savijanje) oplata dati najbolje rezultate.

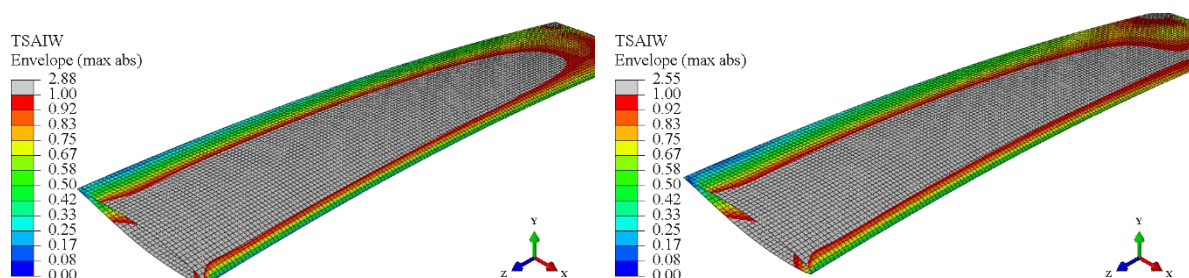


Slika 6.5. Raspored slojeva za 1. (lijevo) i 2. (desno) izvedbu oplata debljine 4 mm

Provedena je analiza za 1. i 2. izvedbu te su rezultati koji se dobivaju za Tsai-Hill i Tsai-Wu kriterij popuštanja prikazani u nastavku (Slika 6.6. i 6.7.). Pritom treba napomenuti da se analizirao svaki sloj kompozita, jer Abaqus po zadanim postavkama provjerava samo vanjske slojeve što nije dobro, jer može doći i do popuštanja unutarnjih slojeva.



Slika 6.6. Tsai-Hill kriterij popuštanja kompozita za 1. (lijevo) i 2. (desno) izvedbu



Slika 6.7. Tsai-Wu kriterij popuštanja kompozita za 1. (lijevo) i 2. (desno) izvedbu

Kao što se moglo pretpostaviti, kompozitna oplata debljine 4 mm ne može podnijeti zadano nametnuto opterećenje. Kako za 1., tako i za 2. izvedbu gotovo cijela oplata popusti. Prema tome, potrebno je povećati debljinu oplate, tj. treba postaviti dodatni broj slojeva na oplatu. Naravno, moguće je izvesti i oplatu koja je cijela izrađena od ugljično-epoksidnog kompozita, ali za takvu izvedbu je potrebno napomenuti da bi bila financijski mnogo skuplja, pa se iz toga razloga takva izvedba neće raditi.

## 6.2. Oplata debljine 8 mm izrađena od stakleno-epoksidnog kompozita

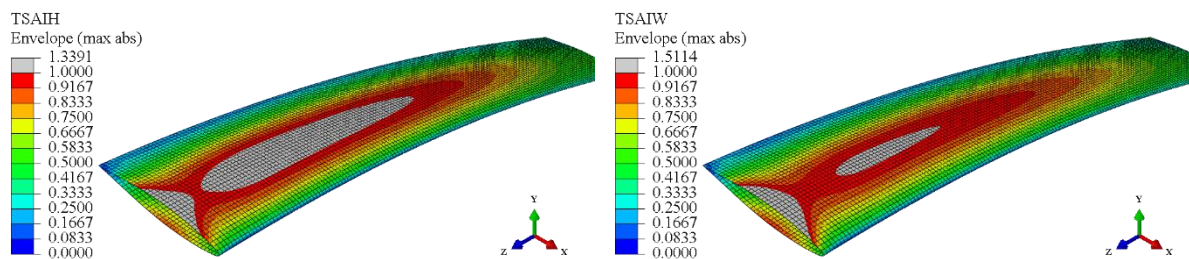
Kako je pokazano da oplata debljine 4 mm nikako ne može izdržati nametnuto opterećenje i da do popuštanja dolazi na gotovo cijeloj oplati, potrebno je ići na povećanje debljine oplate. Povećanje debljine će se obaviti tako da se dodaju dodatni stakleno-epoksidni kompozitni slojevi. Kako bi se utvrdio optimalni raspored slojeva, napraviti će se četiri izvedbe različitih rasporeda slojeva (Slika 6.8.) te će se za svaku izvedbu provjeriti dobiveni Tsai-Hill i Tsai-Wu kriterij popuštanja.

<i>Izvedba 1</i>	<i>Izvedba 2</i>	<i>Izvedba 3</i>	<i>Izvedba 4</i>
0°	0°	0°	0°
45°	90°	90°	0°
90°	0°	0°	0°
-45°	90°	90°	0°
0°	0°	0°	0°
45°	90°	90°	0°
90°	45°	0°	0°
-45°	-45°	90°	0°
0°	45°	45°	0°
45°	-45°	-45°	0°

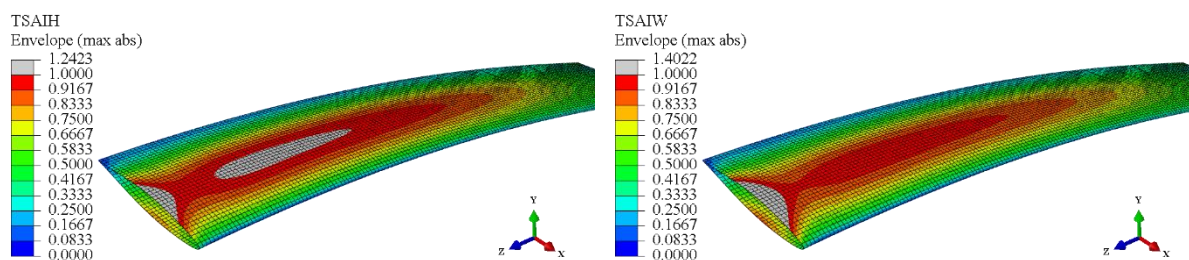
Središnja ploha

**Slika 6.8. Raspored slojeva za različite izvedbe oplate debljine 8 mm**

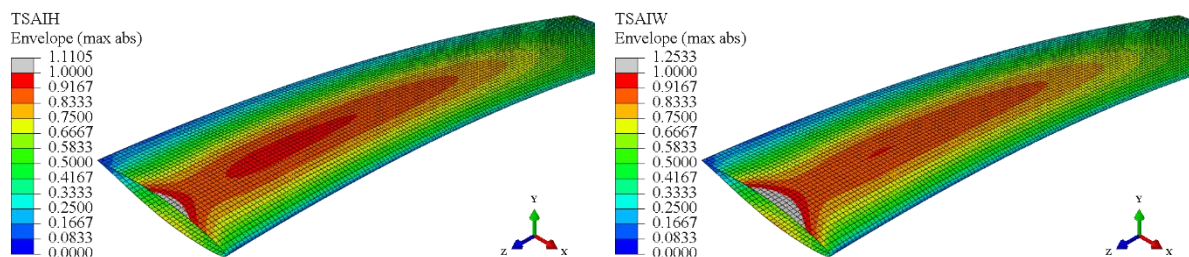
Postavljeni su identični rubni uvjeti pomaka i sila kao i kod izvedbe oplate debljine 4 mm (Slika 6.2.). Također, oplata je ponovno diskretizirana s 10584 četverokutnih ljuskastih konačnih elemenata drugog reda za analizu tankih ljusaka (S8R5). Nakon provedenih analiza dobiveni su rezultati za Tsai-Hill i Tsai-Wu kriterije popuštanja kompozita za svaku izvedbu (Slika 6.9. – 6.12.).



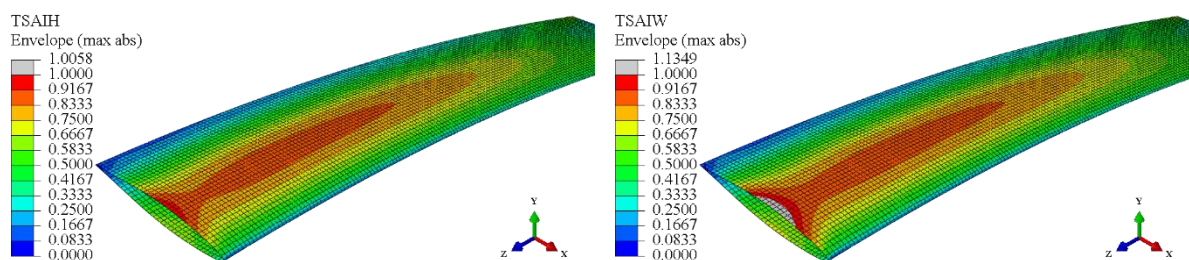
**Slika 6.9. Tsai-Hill (lijevo) i Tsai-Wu (desno) kriterij popuštanja kompozita za oplatu debljine 8 mm za 1. izvedbu rasporeda slojeva**



**Slika 6.10. Tsai-Hill (lijevo) i Tsai-Wu (desno) kriterij popuštanja kompozita za oplatu debljine 8 mm za 4. izvedbu rasporeda slojeva**



**Slika 6.11. Tsai-Hill (lijevo) i Tsai-Wu (desno) kriterij popuštanja kompozita za oplatu debljine 8 mm za 3. izvedbu rasporeda slojeva**



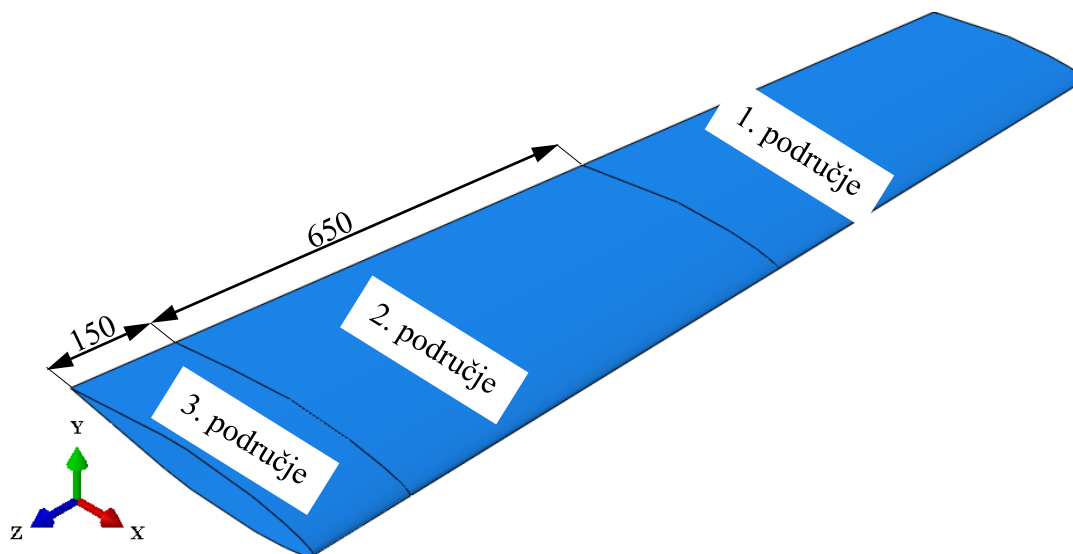
**Slika 6.12. Tsai-Hill (lijevo) i Tsai-Wu (desno) kriterij popuštanja kompozita za oplatu debljine 8 mm za 4. izvedbu rasporeda slojeva**

Promatranjem dobivenih rezultata za Tsai-Hill i Tsai-Wu kriterij popuštanja uočava se da su najlošiji rezultati dobiveni za izvedbu broj 1, a najbolji za izvedbu broj 4. Razlog tome je taj što za zadani način opterećivanja najviše čvrstoći oplate doprinose vlakna koja su usmjerena pod kutem od  $0^\circ$ . Naravno, tu je potrebno napomenuti da pri takvoj izvedbi (izvedba 4) postoji

opasnost u slučaju kada bi se opterećenje događalo na drugačiji način (npr. savijanje okomito na trenutni način savijanja ili oplata opterećena na izvijanje). Kod takvih načina opterećivanja oplata bi vrlo vjerojatno prije popustila. Iz tog će se razloga u daljnjim analizama koristiti oplata koja ima raspodjelu sličnu kao kod izvedbe 2 i 3, kako bi se osiguralo da oplata izdrži opterećenja i kod drugačijih načina opterećivanja.

### 6.3. Oplata izrađena od kombinacije stakleno- i ugljično-epoksidnog kompozita

Kod oplata debljine 8 mm za izvedbu 2 i 3 dobivene su vrijednosti Tsai-Hill i Tsai-Wu kriterija još uvijek malo iznad dopuštene vrijednosti. Također se može uočiti da se po dužini oplata javljaju tri različita područja intenzivnosti visokih vrijednosti kriterija popuštanja. Kako bi se uštedjelo na materijalu, oplata je podijeljena na tri područja (Slika 6.13.). U području malih vrijednosti kriterija popuštanja (1. područje) uzet će se raspored slojeva isti kao i kod izvedbe broj 3 oplata debljine 8 mm. U 2. području će se uz raspored slojeva iz izvedbe broj 3 dodati još 2 dodatna sloja na vanjskim plohama oplata. U područje u kojem se javljaju najveće vrijednosti kriterija popuštanja (3. područje) dodatno će se uz stakleno-epoksidne kompozitne slojeve dodati i ugljično-epoksidni kompozitni slojevi. Raspored slojeva za svako područje prikazan je na Slici 6.14.



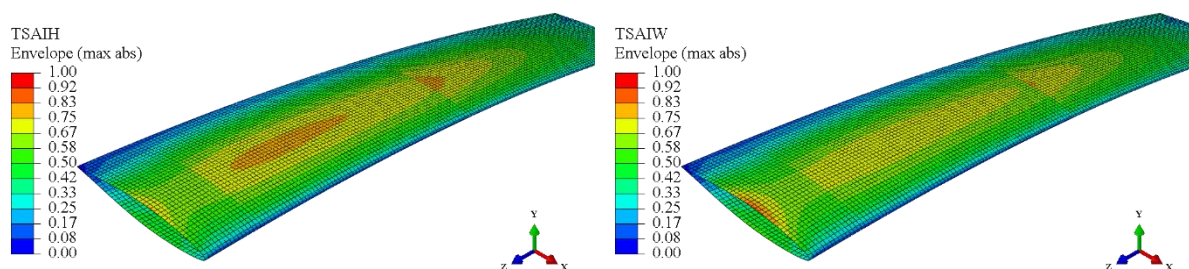
Slika 6.13. Kompozitna oplata podijeljena na 3 područja



1. područje	2. područje	3. područje	
0°	0°	0°	Stakleno-epoksidni kompozitni sloj
90°	90°	90°	
0°	0°	0°	
90°	90°	90°	
0°	0°	90°	
90°	0°	45°	
0°	90°	-45°	Ugljično-epoksidni kompozitni sloj
90°	45°	45°	
0°	-45°	-45°	
90°	45°	45°	
45°	-45°	-45°	
-45°	45°	-45°	
45°	-45°	0°	0°
-45°	-45°	0°	

Slika 6.14. Raspored slojeva za konačnu izvedbu kompozitne oplata

Oplata je diskretizirana na isti način kao i prije, pridruženi su joj jednaki rubni uvjeti pomaka i sila, te je provedena analiza. Dobiveni rezultati za Tsai-Hill i Tsai-Wu kriterij popuštanja kompozita prikazani su na Slici 6.15.



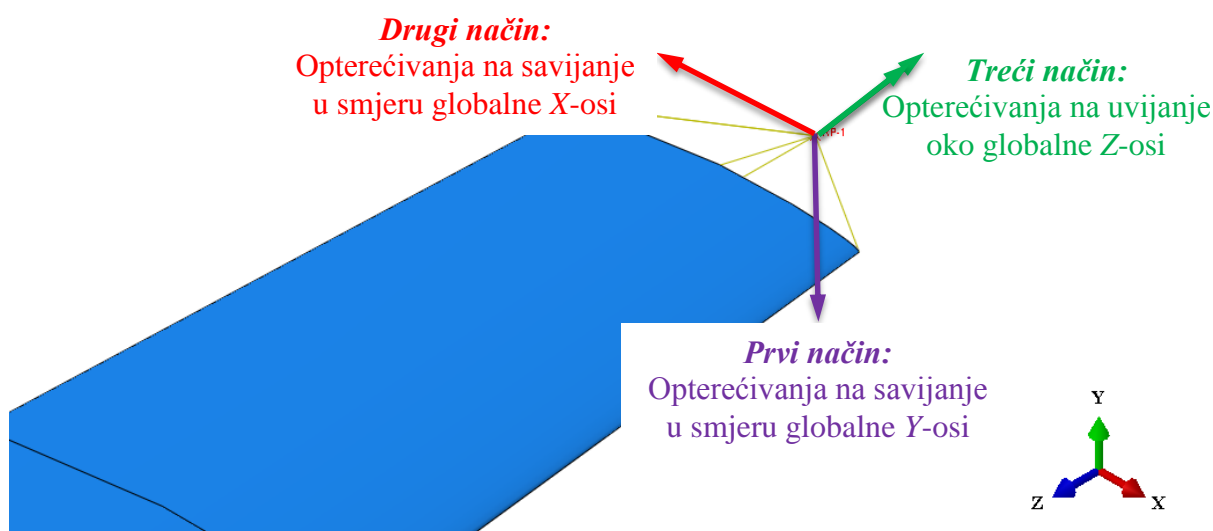
Slika 6.15. Tsai-Hill (lijevo) i Tsai-Wu (desno) kriterij popuštanja kompozita za konačnu izvedbu kompozitne oplata

Za raspored slojeva definiran na Slici 6.14. kriteriji popuštanja ne pređu dopuštenu granicu niti u jednom području na oplati. Uočava se da se u 3. području (područje dodatno ojačano ugljično-epoksidnim kompozitnim slojevima) javljaju najniže vrijednosti kriterija popuštanja, što je bilo i očekivano budući da ugljično-epoksidni kompoziti imaju mnogo bolja mehanička svojstva od stakleno-epoksidnih kompozita. Također se i u 2. i 3. području više ne javljaju visoke vrijednosti kriterija popuštanja. Time se može zaključiti da bi oplata od kompozitnog materijala izdržala zadano opterećenje i da ne bi došlo do popuštanja.

Konačna izvedba oplata je što se tiče mase oko 40% lakša od postojeće izvedbe oplata od visokočvrstog čelika debljine 4 mm. Naime, dobivena kompozitna oplata ima masu svega 21 kg, dok oplata u čeličnoj izvedbi ima 35 kg. Prema tome, izradom oplata od kompozitnog materijala uštedjelo bi se značajno na masi ukupne jedrilice, ali potrebno je još takvu izvedbu oplata dodatno ispitati na drugačije načine opterećivanja.

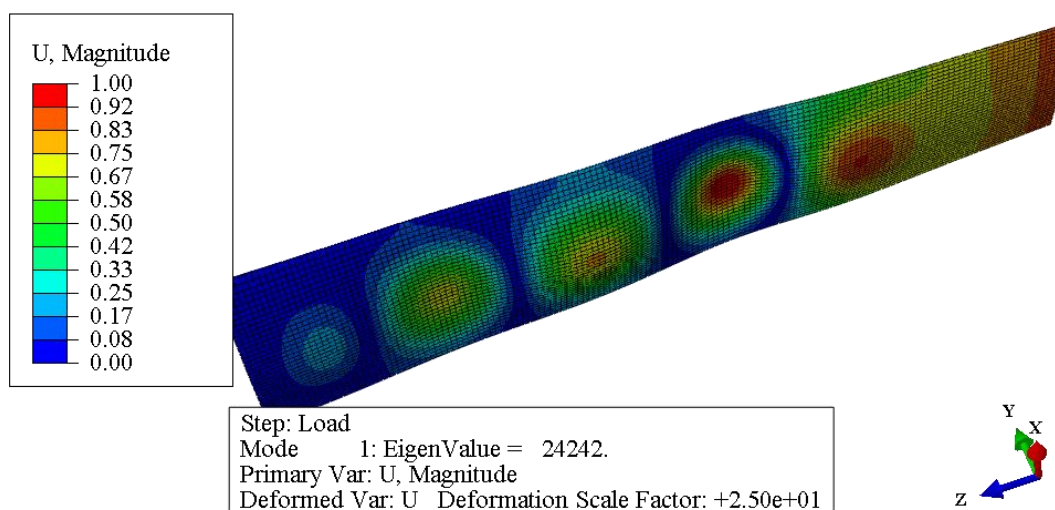
## 6.4. Kontrola stabilnosti kompozitne oplata

Kako se za konačnu izvedbu kompozitne oplata u analizi čvrstoće pokazalo da zadovoljava kriterije popuštanja na cijelom području oplata, potrebno je dodatno utvrditi kod kojeg opterećenja bi takva izvedba izgubila stabilnost. Iz tog će se razloga provest kontrola stabilnosti konačne izvedbe kompozitne oplata. Kako svojstva kompozitnog materijala najviše ovise o smjeru vlakana, potrebno je provjeriti ako ne će li doći do gubitka stabilnosti uslijed nekog drugog načina opterećenja. Iz tog će se razloga kontrola stabilnosti za kompozitnu oplatu provjeravati za tri načina opterećivanja (Slika 6.16.). Rubni uvjeti pomaka bit će jednaki onima u analizi čvrstoće (Slika 6.2. lijevo), dok će se opterećenje zadavati u referentnu točku (Slika 6.2. desno). Kompozitna oplata će i ovdje biti diskretizirana s 10584 četverokutnih ljuskastih konačnih elemenata drugog reda za analizu tankih ljusaka (S8R5). Slika 6.16. prikazuje načine zadavanja jediničnih opterećenja za različite slučajeve djelovanja opterećenja. Jedinično opterećenje se zadaje iz razloga što će prva vlastita vrijednost biti odmah iznos kritične sile kojom se kompozitna oplata najviše smije opteretiti da dođe do gubitka stabilnosti

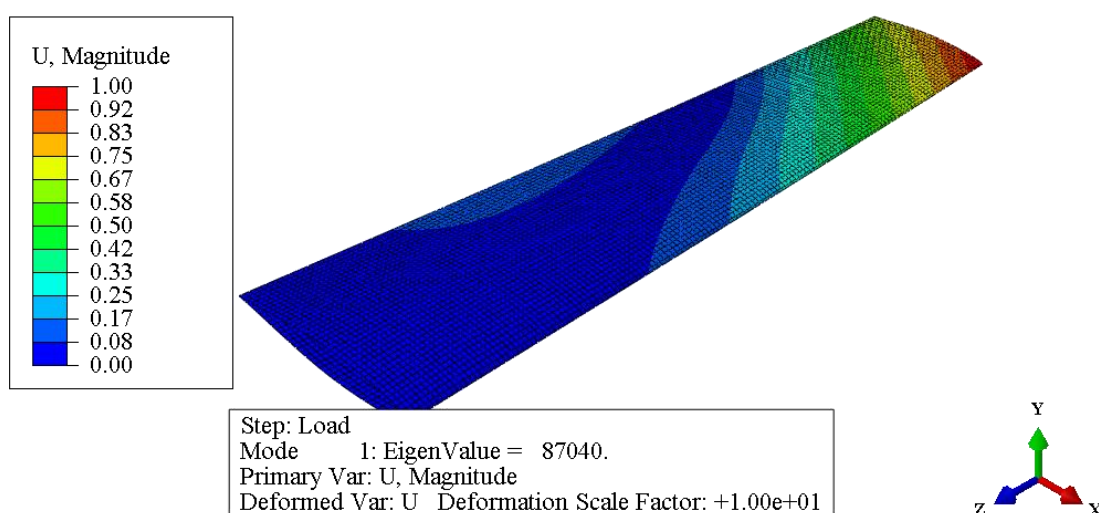


**Slika 6.16. Prikaz načina zadavanja jediničnog opterećenja u referentnu točku na kompozitnoj oplati kod kontrole stabilnosti**

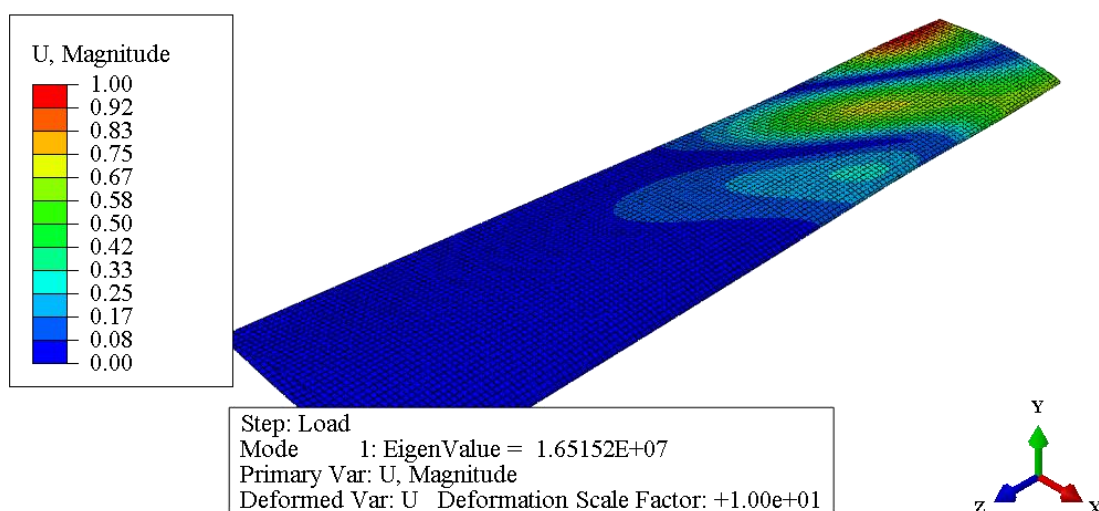
Za svaki način opterećivanja napravljena je zasebna analiza kako bi se provjerilo kod koje sile savijanja, odnosno momenta uvijanja dolazi do gubitka stabilnosti. Dobiveni rezultati prikazani su na slikama 6.17. do 6.19. Kod prvog načina opterećenja (način koji se koristio u prethodnim analizama čvrstoće) dobiveno je da je kritična sila 24242 N, što je više od sile kojom se opterećivalo iz čega se može zaključiti da konačna izvedba oplata neće izgubiti stabilnost kod opterećenja od 20000 N. Također se uočava da se kod drugog načina opterećivanja javlja mnogo veća vrijednosti kritične sile nego kod prvog načina te da se za moment uvijanja javlja jako velika vrijednost. Iz toga se može zaključiti da je prvi način ujedno i najbitniji način opterećivanja, odnosno način kod kojeg je kompozitna oplata najopterećenija.



**Slika 6.17. Prva forma gubitka stabilnosti kod prvog načina opterećivanja kompozitne oplate**



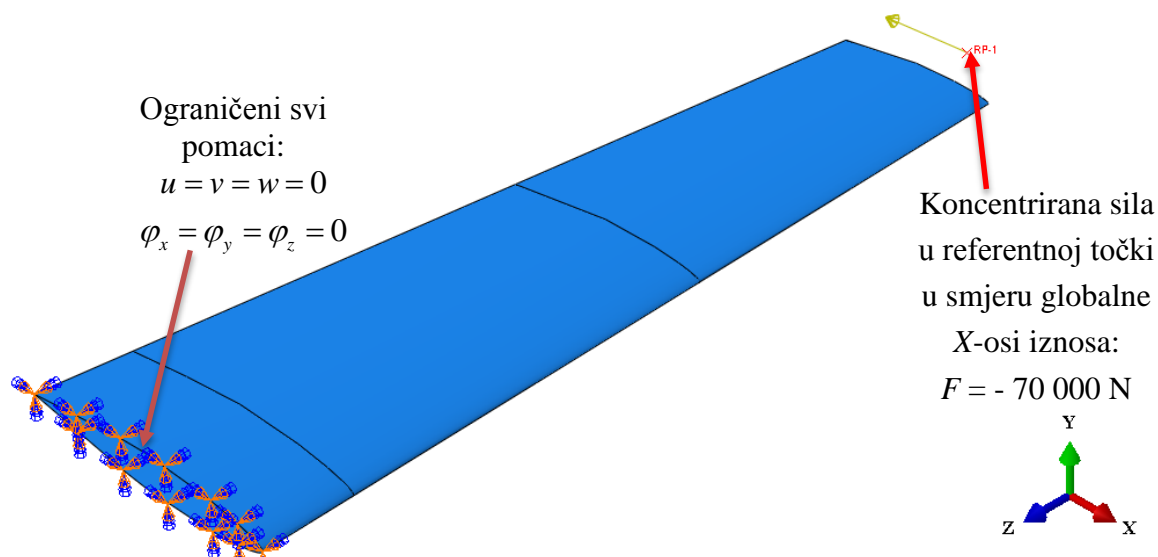
**Slika 6.18. Prva forma gubitka stabilnosti kod drugog načina opterećivanja kompozitne oplate**



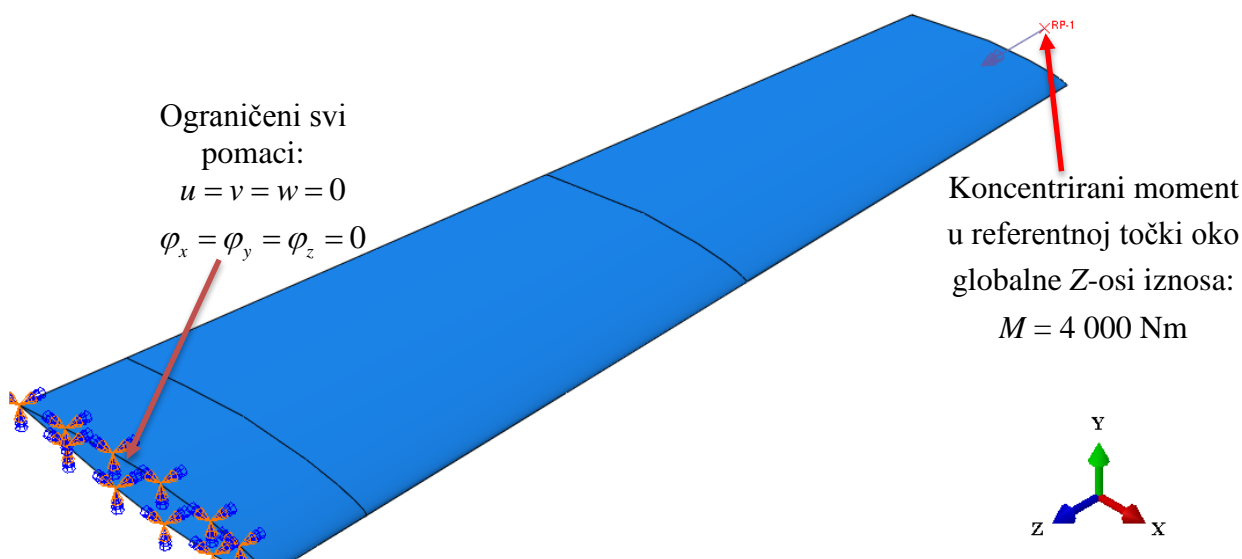
**Slika 6.19. Prva forma gubitka stabilnosti kod trećeg načina opterećivanja kompozitne oplate**

## 6.5. Kompozitna oplata pod utjecajem različitih vrsta opterećenja

Do sada je kompozitna ploča ispitana samo u slučaju kada na nju djeluje protusila sile vjetra koja želi prevrnuti jedrilicu (prvi način opterećivanja sa Slike 6.16.). Budući da kod kompozitnih materijala svojstva jako ovise o usmjerenju vlakana, potrebno je provjeriti kakav bi dala oplata odziv u slučaju drugačijih načina opterećivanja. Iz toga će se provesti još analiza čvrstoće kompozitne oplata za dva slučaja (drugi i treći način opterećivanja sa Slike 6.16.). Prvi od ta slučaja bi bio kada bi oplata s donjim vrhom udarila u neku prepreku, dok je drugi slučaj onaj kada jedrilica skreće, te se javlja moment uvijanja na oplati. Način modeliranja tih vrsta opterećenja prikazano je na Slikama 6.20. i 6.21. Ovdje treba napomenuti da su za vrijednosti sile i momenta uzete manje vrijednosti iznosa koji su dobiveni za kritično opterećenje u odjeljku 6.4., budući da bi kod većih opterećenja oplata izgubila stabilnost te se takvi rezultati ne bi mogli uspoređivati.



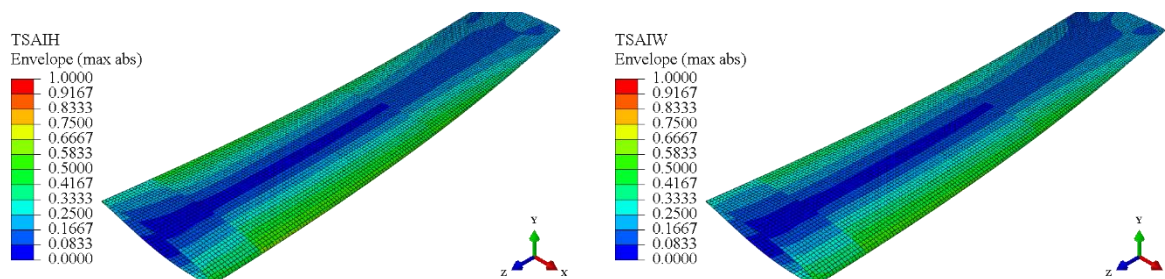
Slika 6.20. Slučaj opterećenja 1



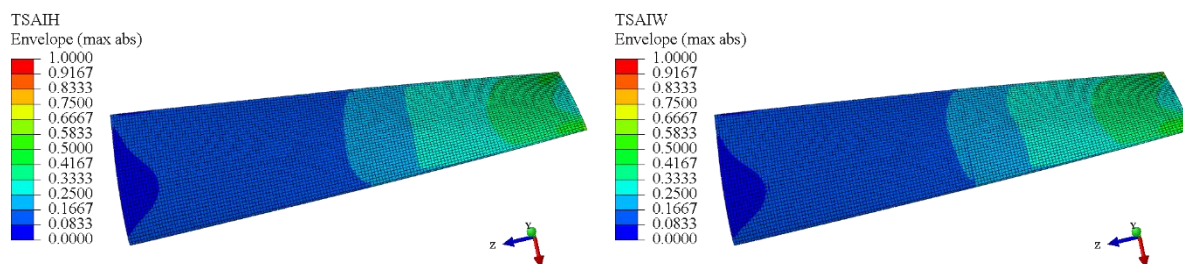
Slika 6.21. Slučaj opterećenja 2



Kompozitna oplata ponovno je diskretizirana na isti način kao i prije, s 10584 četverokutnih ljuskastih konačnih elemenata drugog reda za analizu tankih ljusaka (S8R5). Rubni uvjeti pomaka i rubni uvjeti sila za pojedini su način opterećivanja prikazani na Slikama 6.20. i 6.21. Nakon provedenih analiza dobiveni su rezultati za kriterije popuštanja sukladno Slikama 6.22. i 6.23.



**Slika 6.22. Tsai-Hill (lijevo) i Tsai-Wu (desno) kriterij popuštanja kompozita za slučaj opterećenja 1**



**Slika 6.23. Tsai-Hill (lijevo) i Tsai-Wu (desno) kriterij popuštanja kompozita za slučaj opterećenja 2**

Kriteriji popuštanja za oba načina opterećivanja ne prolaze dopuštene granice, te su na cijelom području oplata u dopuštenim granicama. Također se uočava da kompozitna oplata opterećena na te načine gotovo nema područja s visokim vrijednostima kriterija popuštanja. To je još jedan dodatan pokazatelj da je način opterećivanja koji je korišten u većini analiza (prvi način opterećivanja sa Slike 6.16.) ujedno i najbitniji način opterećivanja, odnosno način kod kojeg je kompozitna oplata najopterećenija.

## 7. ZAKLJUČAK

Provedena je numerička analiza čvrstoće i kontrola stabilnosti kobilice jedrilice. Ispitano je ponašanje kobilice jedrilice izrađene od dvije vrste materijala. Najprije izvedba od visokočvrstog čelika, a kasnije od kompozitnog materijala, odnosno kombinacije stakleno-epoksidnih i ugljično-epoksidnih kompozitnih slojeva. Kompletna analiza provedena je u programskom paketu *Abaqus* 6.14-1.

Kako bi se utvrdilo hoće li konačni elementi dobro opisivati zadani problem, napravljena je verifikacija korištenih elemenata na jednostavnim primjerima savijanja i izvijanja pravokutne izotropne i kompozitne ploče. I za izotropnu i za kompozitnu ploču je za slučaj savijanja ispitana konvergencija progiba središta ploče i normalne komponente naprezanja koje se javlja u sredini ploče na površini. Kod savijanja izotropne ploče za diskretizaciju korišteni su ljuskasti konačni elementi za analizu tankih ljsaka (imaju pet stupnjeva slobode po čvoru) te trodimenzijski konačni elementi. Trodimenzijski konačni elementi morali su se verificirati jer je kasnije kod kobilice izrađene od visokočvrstog čelika bilo potrebno koristiti metode podmodeliranja kako bi se dodatno ispitale koncentracije naprezanja koje se javljaju na modelu. Najprije je pokazano da se dovoljnim brojem konačnih elemenata, pravilnim opisivanjem geometrije i rubnih uvjeta mogu postići rezultati koji su jednaki analitičkim. Najbolji su se u tome pokazali ljuskasti četverokutni konačni elementi za analizu tankih ljsaka drugog reda koji su se i najviše koristili kasnije u radu. Budući da se kasnije u radu metoda podmodeliranja sastojala najprije od globalne analize ljuskastog modela, te zatim lokalne analize na trodimenzijskom podmodelu, potrebno je bilo dodatno ispitati konačne ljuskaste elemente koji imaju šest stupnjeva slobode po čvoru (ljuskasti konačni elementi za analizu debelih ljski). Pokazano je za različite slučajeve debljine ploča da ljuskasti konačni elementi za analizu tankih ljsaka daju jednake rezultate kao i ljuskasti konačni elementi za analizu debelih ljsaka. Time je pokazano da se neće raditi greška korištenjem ljuskastih konačnih elemenata za analizu debelih ljsaka zbog potrebe podmodeliranja. Kod kompozitne ploče opterećene na savijanje koristili su se samo ljuskasti konačni elementi za analizu tankih ljsaka. I ovdje su se najboljim pokazali četverokutni konačni elementi drugog reda te su dobiveni rezultati jednaki analitičkim rezultatima. Na kraju je još pokazano da ljuskasti konačni elementi daju odlične rezultate u slučaju izvijanja pravokutne ploče. Izotropna i kompozitna ploča opterećena je jediničnom silom te su se uspoređivali rezultati dobiveni za kritičnu silu izvijanja. Kao i u prethodnim verifikacijskim analizama, tako su se i ovdje dobiveni rezultati poklopili s analitičkim.

Nakon provedene verifikacije uslijedila je detaljna analiza čvrstoće kobilice izrađene od visokočvrstog čelika. Ta analiza podijeljena je u dva dijela. Najprije se analiziralo ponašanje samo oplata kobilice da se dobije uvid u prirodu ponašanja takve konstrukcije, a kasnije i cjelokupne kobilice. Samo oplata analizirana je za dva slučaja opterećenja. Najprije je oplata opterećena nazivnim opterećenjem od 5000 N, a kasnije je to opterećenje povećano na 20000 N kako bi se uzeli u obzir faktori koji se nikako ne mogu sa sigurnošću predvidjeti, a do kojih bi moglo doći, kao npr. udar kobilice u dno mora. Svaka od tih analiza provedena je linearnim

i nelinearnim proračunima. Kod analize s nazivnim opterećenjem najprije je pokazano da se javljaju koncentracije naprezanja na mjestu geometrijskih diskontinuiteta i da se te koncentracije naprezanja uspješno mogu smanjiti povećanjem debljine oplate i izrađivanjem zaobljenja na mjestu prijelaza. Također je pokazano da za nazivno opterećenje nema velikih odstupanja između linearnih i nelinearnih proračuna. Povećanjem opterećenja došlo je do značajne razlike između linearnog i nelinearnog proračuna. Naime, kod nelinearnog proračuna pokazano je da je došlo do gubitka stabilnosti oplate debljine 4 mm, te se zbog toga nisu mogli uspoređivati dobiveni rezultati za progibe i naprezanja. Iz tog je razloga provedena dodatna analiza oplate debljine 8 mm, te za takvu izvedbu nije došlo do gubitka stabilnosti. Također su razlike između linearne i nelinearne analize bile zanemarive. Time je pokazano da je povećanje debljine jedan od načina kojim se može povećati krutost oplate kako ne bi došlo do gubitka stabilnosti, ali to ima za posljedicu veliko povećanje mase kobilice, dok je s tehnološke strane gledano vrlo teško oblikovati lim debljine 8 mm. Iz tog je razloga provedena analiza cijele kobilice kod koje se dodatno javljaju uzdužne ukrute koje imaju ulogu spriječiti gubitak stabilnosti kobilice. Prema tome, provedena je analiza cjelokupne kobilice.

Cjelokupna kobilica sastoji se od oplate, kutije, dna kutije i dviju uzdužnih ukruta. Za razliku od analize samo oplate debljine 4 mm gdje je oplate popustila, ovdje uzdužne ukrute ispunjavaju zadaću, stoga kobilica ne popusti ni na jednom dijelu. Također, uspoređivanjem rezultata dobivenih za progib i ekvivalentno naprezanje prema von Misesu zaključilo se da su razlike između linearne i nelinearne analize za takvu izvedbu kobilice s takvim opterećenjem zanemarive, te se neće raditi greška ako bi se koristio samo linearni proračun. Ovdje treba napomenuti da su rezultati za maksimalna naprezanja koja se javljaju na kobilici višestruko veća od dopuštene granice iz čega se može zaključiti da bi uslijed takvoga opterećenja došlo do loma kobilice. Te velike koncentracije naprezanja nisu se uspjele ukloniti niti izradom zaobljenja na mjestu spoja. Jedini način kojim bi se te koncentracije naprezanja mogle smanjiti je povećanjem debljine dijelova kobilice. Naime, upravo je kod analize samo oplate pokazano da se povećanjem debljine te koncentracije naprezanja mogu značajno smanjiti. Naravno, tu postoje dvije mogućnosti. Jedna mogućnost je povećanja debljine dijelova cijele kobilice, što će za posljedicu imati veliko povećanje mase. Druga je mogućnost ojačavanje samo dijela kobilice gdje se javljaju velike koncentracije naprezanja. Ojačavanje je gledano s tehnološke strane zahtjevnije jer bi se trebalo koristiti mnogo više spajanje dijelova, odnosno postojalo bi mnogo više dijelova koje bi onda bilo zahtjevnije spojiti zajedno. Na samome kraju, napravljena je još kontrola stabilnosti takve izvedbe kobilice kako bi se utvrdilo kod koje sile bi takva kobilica popustila. Dobiveno je da je kritična sila kojom bi se trebala opteretiti kobilica 1,5 puta veća od opterećenja koje je korišteno u prethodnim analizama. Može se zaključiti da zadana geometrija kobilice zadovoljava uvjete stabilnosti, ali da ne zadovoljava uvjete čvrstoće te će biti potrebna dodatna poboljšanja na realnoj konstrukciji.

Kompozitna izvedba oplate kobilice ne postoji u stvarnosti te je iz toga razloga u ovome radu napravljeno početno, idejno rješenje za takvu vrstu oplate kobilice. Ispitane su različite debljine takve izvedbe oplate s različitim načinima postavljanja kompozitnih slojeva, sve dok

se nije dobila konačna izvedba koja zadovoljava kriterije popuštanja na cijelome svome području. Kako svojstva kompozitni materijala jako ovise o orijentaciji vlakana, bilo je potrebno ispitati takvu izvedbu različitim načinima opterećivanja. Primjeri za takve dodatne načine opterećivanja jesu slučajevi kada bi oplata s donjim vrhom udarila u neku prepreku ili jedrilica skreće te se javlja moment uvijanja na oplati. Iz tog je razloga najprije napravljena kontrola stabilnosti kompozitne oplate kobilice da se utvrdi kritično opterećenje kojim se ona može opteretiti za pojedine načine opterećenja. Nakon dobivenih rezultata za kritične sile proveden je dodatni proračun čvrstoće da se provjere kriteriji popuštanja za takve načine opterećivanja. Utvrđeno je da su kriteriji popuštanja koji se javljaju mnogo manji od slučaja kada na kobilicu djeluje protusila sili vjetra. Prema tome se moglo zaključiti da je opterećenje protusile sili vjetra ujedno i najbitniji način opterećenja kobilice te će doći do loma kobilice, ako do njega dođe, doći upravo zbog te sile. Takva konačna izvedba kompozitne oplate kobilice ima masu od svega 21 kg. Usporedbe radi, čelična oplata debljine od 4 mm koja je korištena u ovome radu ima masu ok 36 kg. Time je pokazano da se izrađivanjem kobilice od kompozitnog materijala može uštedjeti i do 40% na masi, što može biti značajan iznos.

## LITERATURA

- [1] <https://en.wikipedia.org/wiki/Sailboat>, preuzeto 4.6.2016.
- [2] <http://www.aventin.hr/index.php?m=jedrilica>, preuzeto 4.6.2016.
- [3] Smojver I. *Mehanika kompozitnih materijala – skripta s predavanja*. Fakultet strojarstva i brodogradnje. Zagreb. 2007.
- [4] Sorić J. *Metoda konačnih elemenata*. Zagreb: Golden marketing-Tehnička knjiga, 2004.
- [5] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill Book Company. New York. 1987.
- [6] Skozrit I. *Analiza ploča u pravokutnim koordinatama – vježbe iz Čvrstoće konstrukcija*. Zagreb. 2014.
- [7] Wierzbicki T. *Structural Mechanics – Lecture 11: Buckling of Plates and Sections*. Massachusetts Institute of Technology – Course Notes. 2013.
- [8] Wierzbicki T. *Plates and Shells*. Massachusetts Institute of Technology – Course Notes. 2006.
- [9] Shiu-Chuan H, Chi-Sheng L. *Deflection of Cross-Ply Composite Laminates Induced by Piezoelectric Actuators*. Taiwan, Department of Mechanical Engineering. 2010. 719-733.
- [10] Manahan MA. *A Finite Element Study of the Deflection of Simply Supported Composite Plates Subject to Uniform Load*. Rensselaer Polytechnic Institute Hartford, Connecticut. 2011.
- [11] Leissa AW. *Buckling of laminated composite plates and shell panels*. The Ohio State University. 1985.
- [12] Özben T. *Analysis of critical buckling load of laminated composites plate with different boundary conditions using FEM and analytical methods*. Computational Materials Science 2009. 1006-1015.
- [13] Ghorbanpour AA, Maghamikia S, Mohammadimehr M, Arefmanesh A. *Buckling analysis of laminated composite rectangular plates reinforced by SWCNTs using analytical and finite element methods*. Journal of Mechanical Science and Technology. 2011. 809-820.
- [14] <http://www.performance-composites.com/carbonfibre/carbonfibre.asp>, preuzeto 10.5.2016.
- [15] Programski paket Abaqus 6.14-1., <http://50.16.225.63/v6.14/index.html>
- [16] Programski paket Mathematica 9.0., <http://www.wolfram.com/mathematica/>
- [17] Programski paket Matlab R2013, <http://www.mathworks.com/products/matlab/>